

LES NOUVEAUX

# Précis

BRÉAL

**Physique**

# Électromagnétisme

**MP**

Cours

Méthodes

Exercices résolus

P. KREMPF

**Nouveau programme**

 **Bréal**  
L'ÉDITEUR DES PRÉPAS





LES NOUVEAUX  
**Précis**  
B R É A L

# Électromagnétisme

**MP**

**P. KREMPF**

Professeur en classes préparatoires à CPE Lyon

This One



1775-EXJ-G7KJ

1, rue de Rome - 93561 Rosny-sous-Bois cedex

 **Breal**  
éditions

Copyrighted material

# LES NOUVEAUX Précis B R É A L

## **Mathématiques 2<sup>e</sup> année**

- Analyse / MP
- Algèbre et géométrie / MP

## **Physique 2<sup>e</sup> année**

- Mécanique / MP-PC
- Électromagnétisme / MP
- Électronique / MP
- Optique / MP-PC-PSI-PT
- Thermodynamique / MP

## **Chimie 2<sup>e</sup> année**

- Chimie / MP/PT

## **Exercices 2<sup>e</sup> année**

- Mathématiques / MP
- Physique / MP

*Maquette : Sophie Martinet*

*Couverture : Sophie Martinet*

*Édition : Pierre Hugel*

*Mise en pages et illustrations : Suka 22, Soft Office et Compoméca*

© Bréal 2004

Toute reproduction même partielle interdite.



Dépôt légal : septembre 2004.

ISBN 2 7495 0397 3



**L**es Nouveaux Précis Bréal sont conçus pour apporter aux étudiants des classes préparatoires une aide efficace dans leur travail. Tout en conservant la rigueur des éditions précédentes, nous nous sommes efforcés d'aplanir au mieux toutes les difficultés inhérentes au discours scientifique. Nous savons par expérience que le rythme de la prépa n'autorise aucune perte de temps, et nous pensons qu'une explication claire et précise permet d'éviter au lecteur tout « blocage » inutile.

Strictement conforme au nouveau programme, cet ouvrage s'adresse à tous les étudiants de deuxième année de la filière MP. Chaque chapitre est divisé en trois parties complémentaires.

- Le **Cours**, qui présente les principaux raisonnements à comprendre et à connaître, accompagnés de nombreuses applications directes afin d'assimiler immédiatement les notions traitées.
- Les pages **Méthodes**, qui contiennent deux rubriques indispensables à la progression personnelle : *L'essentiel* permet de mémoriser rapidement tout ce qu'il faut retenir du chapitre, et la *Mise en œuvre* expose les grandes méthodes afin d'acquérir les bons « réflexes » en situation.
- Les **Exercices**, classés par niveaux de difficulté, dont les solutions détaillées sont enrichies d'astuces et de conseils (précédés des logos  ou ). Certains exercices sont accompagnés de courtes indications, comme en colle : il suffit parfois d'un petit « déclic » pour démarrer ! En outre, le chapitre 6 contient deux problèmes de concours traités exhaustivement.

Il nous est apparu nécessaire d'accorder aux **Méthodes** et aux **Exercices** une place équivalente à celle du **Cours**. En effet, l'apprentissage ne peut pas être efficace sans combiner étroitement ces trois dimensions : comprendre, savoir faire et s'entraîner. En revanche, s'il organise intelligemment son travail, l'étudiant pourra s'améliorer dans toutes les disciplines en gérant au mieux son temps et ses efforts, principale condition de la réussite.

Ainsi, les étudiants de MP disposeront, en électromagnétisme, d'un outil de travail complet, adapté au rythme soutenu de cette deuxième année de préparation aux concours.

Nous espérons que ce Nouveau Précis les aidera à passer leurs épreuves avec réussite et nous répondrons volontiers à toute suggestion, remarque ou critique par e-mail à l'adresse [infos@editions-breial.fr](mailto:infos@editions-breial.fr).

L'éditeur et les auteurs



# Sommaire

<b>Chapitre 1 ■</b>	<b>Éléments d'analyse vectorielle et rappels mathématiques</b>	<b>7</b>
	<i>Méthodes : l'essentiel ; mise en œuvre</i>	22
	<i>Exercices : énoncés, solutions</i>	26
<b>Chapitre 2 ■</b>	<b>Les équations locales de l'électromagnétisme</b>	<b>33</b>
	<i>Méthodes : l'essentiel ; mise en œuvre</i>	69
	<i>Exercices : énoncés, solutions</i>	80
<b>Chapitre 3 ■</b>	<b>Induction électromagnétique dans un circuit fixe</b>	<b>123</b>
	<i>Méthodes : l'essentiel ; mise en œuvre</i>	136
	<i>Exercices : énoncés, solutions</i>	141
<b>Chapitre 4 ■</b>	<b>Induction électromagnétique dans un circuit mobile</b>	<b>163</b>
	<i>Méthodes : l'essentiel ; mise en œuvre</i>	170
	<i>Exercices : énoncés, solutions</i>	174
<b>Chapitre 5 ■</b>	<b>Propagation et rayonnement</b>	<b>199</b>
	<i>Méthodes : l'essentiel ; mise en œuvre</i>	226
	<i>Exercices : énoncés, solutions</i>	234
<b>Chapitre 6 ■</b>	<b>Quelques problèmes</b>	<b>269</b>
	<i>Problème 1 : champ électromagnétique</i>	
	<i>    dans un condensateur plan cylindrique</i>	270
	<i>Solution</i>	273
	<i>Problème 2 : chute d'un aimant dans un tuyau métallique</i>	278
	<i>Solution</i>	280
<b>I n d e x</b>		<b>284</b>





# Éléments d'analyse vectorielle et rappels mathématiques

## Introduction

La démarche du physicien n'est pas qu'empirique. Il crée des modèles mathématiques qui permettent de « mettre en équations » les événements.

Le but de ce chapitre est de mettre à disposition de l'étudiant les outils mathématiques dont il aura besoin en seconde année dans l'étude des phénomènes physiques du programme.

L'approche physique est privilégiée par rapport à la technique de calcul, le but étant d'appréhender correctement l'interprétation physique des équations ou résultats de calculs auxquels aboutit l'outil mathématique.

## Plan du chapitre 1

A. Systèmes de coordonnées et intégrales .....	8
B. Flux d'un champ de vecteurs .....	9
C. Opérateur gradient .....	11
D. Opérateur divergence .....	13
E. Opérateur rotationnel .....	15
F. Opérateur laplacien .....	18
G. Opérateur Nabla .....	19
<i>Méthodes</i>	
L'essentiel ; mise en œuvre. ....	22
<i>Énoncés des exercices</i> .....	26
<i>Solutions des exercices</i> .....	27



# A. Systèmes de coordonnées

On rappelle les trois systèmes qui ont déjà été rencontrés en première année dans le cours d'électromagnétisme, entre autres.

## A.1. Coordonnées cartésiennes

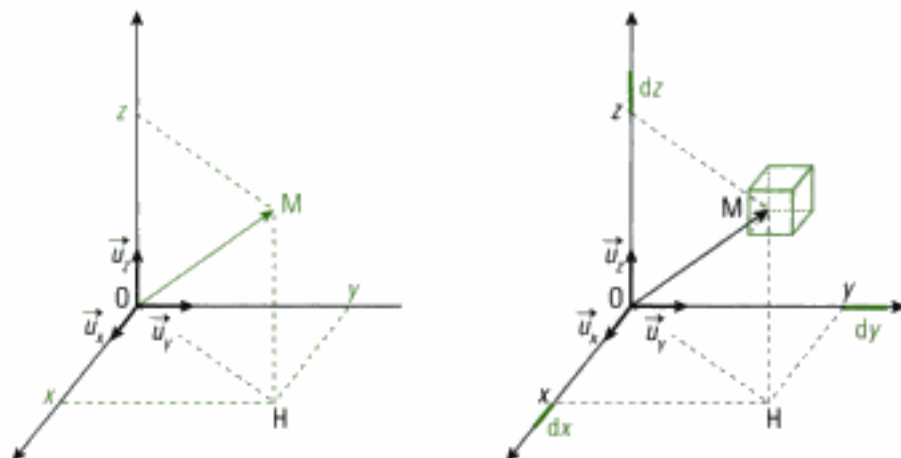


Fig. 1 - Le système de coordonnées cartésiennes.

Dans le repère orthonormé direct  $(O ; \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ , un point M de l'espace est repéré par ses coordonnées cartésiennes  $(x, y, z)$ . Le vecteur position du point M s'écrit alors :

$$\vec{OM} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z.$$

Lorsque les coordonnées  $x, y$  ou  $z$  de M subissent une variation élémentaire  $dx, dy$  ou  $dz$ , le point M se déplace respectivement de  $dx\vec{u}_x, dy\vec{u}_y$  ou  $dz\vec{u}_z$ . Ainsi, le volume élémentaire  $dV$  est un petit parallélépipède rectangle d'arêtes  $dx, dy$  et  $dz$  :

$$dV = dx \times dy \times dz.$$

## A.2. Coordonnées cylindriques

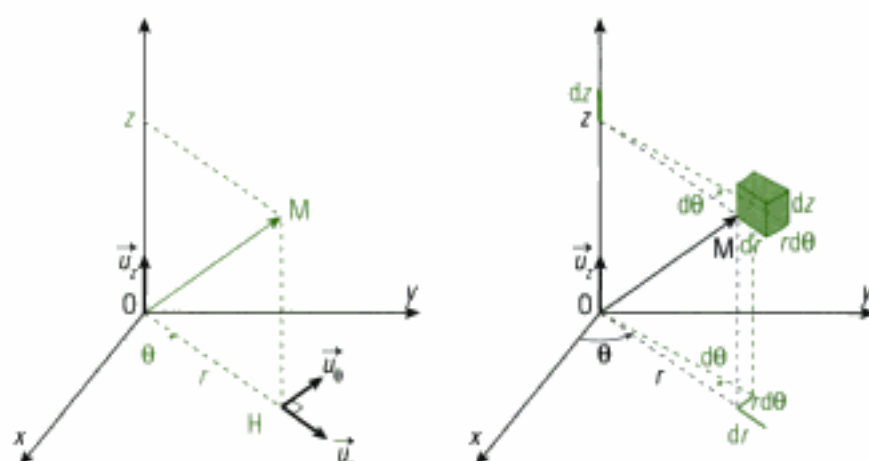


Fig. 2 - Le système de coordonnées cylindriques.

On peut aussi repérer tout point M de l'espace par ses coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$  (fig. 2) :

- $r$  représente la distance du point M à l'axe  $Oz$  ( $r > 0$ ) ;
- $\theta$  définit la position du point M autour de  $Oz$  ( $\theta$  angle compris entre 0 et  $2\pi$ ) ;
- $z$  représente la cote du point M.

1. Cette base est une base locale, car les directions des vecteurs  $\vec{u}_r$  et  $\vec{u}_\theta$  dépendent de la position du point M.

On définit la base<sup>1</sup> orthonormée directe  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$  en posant  $\vec{u}_r = \frac{\overrightarrow{OH}}{OH}$  (H projection orthogonale du point M sur le plan xOy). Dans le repère orthonormé, le vecteur position du point M s'écrit alors :

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r + z\vec{u}_z.$$

Lorsque les coordonnées  $r, \theta$  ou  $z$  de M subissent une variation élémentaire  $dr, d\theta$  ou  $dz$ , le point M se déplace respectivement de  $dr\vec{u}_r, r d\theta\vec{u}_\theta$  ou  $dz\vec{u}_z$ . Ainsi, le volume élémentaire  $dV$  est un petit parallélépipède rectangle d'arêtes  $dr, r d\theta$  et  $dz$  :

$$dV = dr \times r d\theta \times dz.$$

### A.3. Coordonnées sphériques

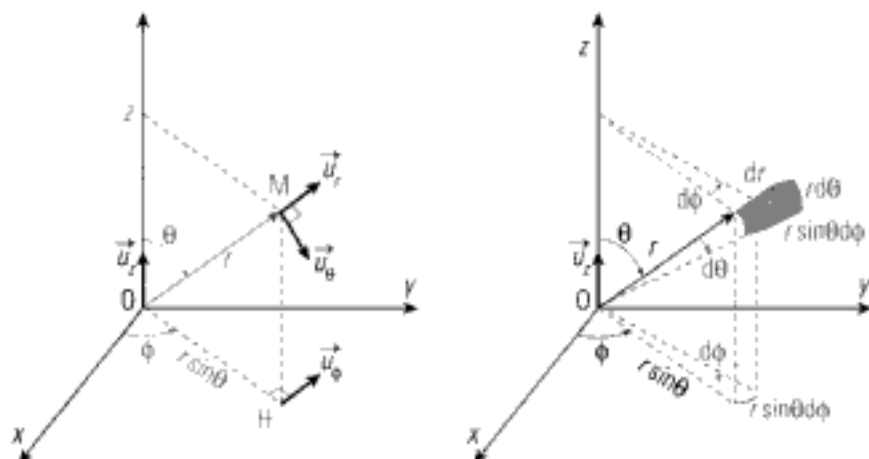


Fig. 3 - Le système de coordonnées sphériques.

2. L'angle  $\theta$  n'est pas le même que celui des coordonnées cylindriques, car, en coordonnées sphériques, c'est l'angle  $\phi$  qui donne la position de M autour de Oz.

3. Cette base est une base locale, car les directions des vecteurs  $\vec{u}_r, \vec{u}_\theta$  et  $\vec{u}_\phi$  dépendent de la position du point M.

Enfin, on peut aussi repérer tout point M de l'espace par ses coordonnées sphériques  $(r, \theta, \phi)$  (fig. 3) :

- $r$  représente la distance du point M au point O ( $r = OM > 0$ ) ;
- $\theta$  et  $\phi$  définissent la direction dans laquelle, depuis le point O, on voit le point M ( $\theta$  angle compris entre 0 et  $\pi$ ,  $\phi$  angle compris entre 0 et  $2\pi$ ).

On définit la base<sup>3</sup> orthonormée directe  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\phi)$  en posant  $\vec{u}_r = \frac{\overrightarrow{OH}}{OH}$ .

Dans le repère orthonormé  $(O ; \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\phi)$ , le vecteur position du point M s'écrit alors :

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r.$$

Lorsque les coordonnées  $r, \theta$  ou  $\phi$  de M subissent une variation élémentaire  $dr, d\theta$  ou  $d\phi$ , le point M se déplace respectivement de  $dr\vec{u}_r, r d\theta\vec{u}_\theta$  ou  $r \sin\theta d\phi\vec{u}_\phi$ . Ainsi, le volume élémentaire  $dV$  est un petit parallélépipède rectangle d'arêtes  $dr, r d\theta$  et  $r \sin\theta d\phi$  :

$$dV = dr \times r d\theta \times r \sin\theta d\phi.$$

### A.4. Intégrales multiples

Lorsqu'on intègre sur une surface ou un volume, il est nécessaire de faire varier plusieurs coordonnées. Le calcul d'une telle intégrale, dans le cas général, est compliqué. Cependant, si la fonction à intégrer est un produit de fonctions de chacune des coordonnées et que les bornes d'intégration de chaque coordonnée sont indépendantes des autres coordonnées, alors l'intégrale multiple est égale au produit des intégrales simples<sup>4</sup> :

4. Cette propriété est une application du théorème de Fubini.

$$\iiint f(x)g(y)h(z)dx dy dz = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx \int_{y_0}^{y_1} g(y)dy \int_{z_0}^{z_1} h(z)dz.$$

Cette propriété est en général toujours vérifiée, ce qui permet de se ramener dans tous les cas étudiés aux calculs d'intégrales simples.

### Application 1 Calcul d'un volume

Calculer, en utilisant une intégrale, le volume d'un cylindre de hauteur  $h$  et de rayon  $R$ .

#### Solution

Le système de coordonnées le mieux adapté à cette géométrie est le système de coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$ . On choisit l'axe de révolution du cylindre comme axe  $Oz$ , son origine  $O$  étant placée au centre de l'une des bases du cylindre. Un élément de volume  $dV$  s'écrit :

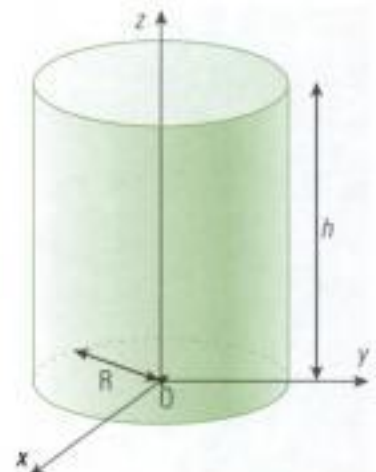
$$dV = dr \times r d\theta \times dz.$$

Le volume  $V$  est la somme de tous les éléments de volume  $dV$  :

$$V = \iiint dV = \iiint dr \times r d\theta \times dz,$$

avec  $r$  variant entre 0 et  $R$ ,  $\theta$  variant entre 0 et  $2\pi$ ,  $z$  variant entre 0 et  $h$ . Comme la fonction à intégrer est un produit de fonctions de chacune des coordonnées, on a :

$$V = \int_0^R r dr \times \int_0^{2\pi} d\theta \times \int_0^h dz = \left[ \frac{r^2}{2} \right]_0^R \times [\theta]_0^{2\pi} \times [z]_0^h = \frac{R^2}{2} \times 2\pi \times h = \pi R^2 h.$$



1. Un champ est une grandeur physique qui est définie en tout point d'un volume de l'espace (ou, plus rarement, d'une surface). La grandeur concernée dépend donc des coordonnées du point que l'on considère, mais peut aussi dépendre du temps. Un champ stationnaire est indépendant du temps. Un champ uniforme ne dépend pas du point où on le considère (indépendant des coordonnées).

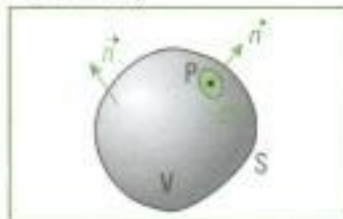


Fig. 4 - Surface fermée.

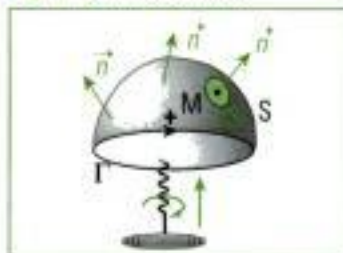


Fig. 5 - Surface ouverte.

## B. Flux d'un champ<sup>1</sup> de vecteurs

Soit  $\vec{W}$  un champ de vecteurs et  $S$  une surface. Le flux  $\Phi$  du champ  $\vec{W}$  à travers la surface  $S$  s'écrit :

$$\Phi = \iint_S \vec{W} \cdot d\vec{S} = \iint_S \vec{W} \cdot \vec{n} dS,$$

où  $d\vec{S}$  est « le vecteur surface élémentaire » de l'élément de surface  $dS$  centré sur un point  $P$  de  $S$ . Le vecteur  $\vec{n}$  est le vecteur unitaire normal à l'élément de surface au point  $P$ . Son orientation dépend de la nature de la surface.

### B.1. Cas d'une surface « fermée »

Si la surface  $S$  est fermée (fig.4), alors elle délimite un volume  $V$  et la normale à la surface est toujours orientée sortant de  $S$  (convention). Afin de montrer que  $S$  est fermée, on note alors :

$$\Phi = \oint_S \vec{W} \cdot \vec{n} dS.$$

### B.2. Cas d'une surface « ouverte »

Si la surface  $S$  est ouverte, alors elle s'appuie nécessairement sur une ligne fermée (un contour)  $\Gamma$  (fig.5). On choisit un sens « + » à un parcours le long de  $\Gamma$  (on l'oriente). Le sens de  $\vec{n}$  est alors déterminé à partir de cette orientation par « la règle du tire-bouchon ».



## C. Opérateur gradient

### C.1. Définition

1. Le champ est une grandeur scalaire, c'est à dire un nombre (par opposition à un champ de vecteurs). Par exemple, la température, la pression, la masse volumique, sont des champs scalaires. On supposera ces champs définis, continus et à dérivées continues dans tout le domaine d'étude, ce qui est presque systématiquement le cas en physique.

Le gradient est un vecteur obtenu à partir d'un champ de scalaires<sup>1</sup>. Dans un système de coordonnées donné, chaque composante du gradient correspond à une dérivation par rapport à la coordonnée d'espace correspondante.

#### Définition 1

Le gradient du champ de scalaires  $f$  est défini tel que, pour tout déplacement élémentaire  $d\vec{l}$ , on ait :

$$\vec{\text{grad}} f \cdot d\vec{l} = df$$

où  $df$  est la différentielle totale de  $f$ .

Le gradient admet donc les expressions suivantes dans les divers systèmes de coordonnées :

– En coordonnées cartésiennes  $(x, y, z)$  :

$$\vec{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{u}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{u}_z.$$

– En coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$  :

$$\vec{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{u}_z.$$

– En coordonnées sphériques  $(r, \theta, \phi)$  :

$$\vec{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \vec{u}_\phi.$$

Le gradient étant un opérateur de dérivation vectorielle par rapport à une coordonnée d'espace, il est homogène à l'inverse d'une distance et son unité SI est le  $\text{m}^{-1}$ . L'unité SI de  $\vec{\text{grad}} f$  est ainsi celle de  $f$  divisée par des mètres.

### C.2. Signification physique

2. Ceci est vrai car le champ est continu.

3. Les isothermes sont les surfaces où la température est la même en chaque point, les isobares sont celles de même pression, etc...

Dans l'espace, pour un champ de scalaires non uniforme, le lieu des points où le champ garde une même valeur est une surface<sup>2</sup>. Le gradient est perpendiculaire à ces surfaces « iso ... (nom du champ) »<sup>3</sup> et il est orienté dans le sens des valeurs croissantes du champ. Un fort gradient signifie de fortes variations des valeurs du champ sur de courtes distances.

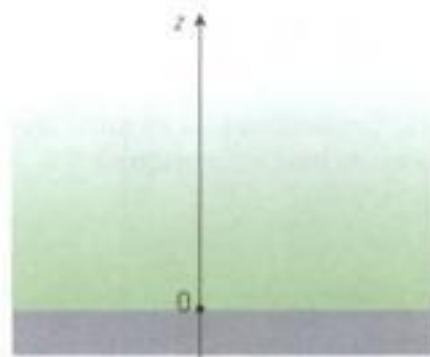
#### Application 2 Les isothermes à la surface du sol

En été, les routes sont chauffées par le Soleil, et on peut grossièrement modéliser le champ de la température de l'air au dessus de la route (demi-espace d'équation  $z > 0$ ) par la loi :

$$T(x, y, z) = T_0 + T_1 e^{-\frac{z}{h}},$$

où  $T_0 = 300\text{K}$ ,  $T_1 = 30\text{ K}$  et  $h = 3\text{ m}$ .

Calculer le gradient de température au niveau du sol et à des altitudes de 1 mètre, 3 mètres et 15 mètres.



### Solution

La loi de température est donnée en coordonnées cartésiennes et le gradient du champ s'écrit :

$$\vec{\text{grad}} T = \frac{\partial T}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial T}{\partial y} \vec{u}_y + \frac{\partial T}{\partial z} \vec{u}_z = -\frac{T_1}{h} e^{-\frac{z}{h}} \vec{u}_z.$$

Il est dirigé dans le sens opposé de l'axe Oz et sa valeur est :

$$\|\vec{\text{grad}} T\| (z=0) = 10 \text{ K}\cdot\text{m}^{-1} ; \quad \|\vec{\text{grad}} T\| (z=1) = 7,1 \text{ K}\cdot\text{m}^{-1} ;$$

$$\|\vec{\text{grad}} T\| (z=3) = 3,7 \text{ K}\cdot\text{m}^{-1} ; \quad \|\vec{\text{grad}} T\| (z=15) = 0,07 \text{ K}\cdot\text{m}^{-1}.$$

On remarque que la valeur du gradient est d'autant plus élevée que la variation de la température est brutale.

## C.3. Circulation d'un gradient

1. On rappelle que la circulation d'un champ  $\vec{W}$  le long d'un chemin  $\Gamma$  s'écrit :

$$C = \int_{\Gamma} \vec{W} \cdot d\vec{l}.$$

2. Par définition du gradient.

La circulation<sup>1</sup> C du gradient d'un champ de scalaires  $f$  entre deux points A et B s'écrit :

$$C = \int_A^B \vec{\text{grad}} f \cdot d\vec{l} = \int_A^B df = f(B) - f(A)^2.$$

### Propriété 1

La circulation du gradient d'une fonction  $f$  entre deux points A et B vaut :

$$C = \int_A^B \vec{\text{grad}} f \cdot d\vec{l} = f(B) - f(A).$$

Elle ne dépend pas du chemin suivi entre A et B, mais seulement de la valeur du champ de scalaires  $f$  aux deux points A et B.

### Application 3 Composantes du gradient en cylindriques

Utiliser le résultat précédent pour retrouver simplement les composantes de l'opérateur gradient dans le système de coordonnées cylindriques.

### Solution

On sait que la circulation élémentaire du gradient est une différentielle totale :

$$\vec{\text{grad}} f \cdot d\vec{l} = df = \frac{\partial f}{\partial r} dr + \frac{\partial f}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial f}{\partial z} dz.$$

En coordonnées cylindriques, les trois coordonnées sont  $r$ ,  $\theta$  et  $z$ . Un déplacement élémentaire s'écrit :

$$d\vec{l} = dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + dz \vec{u}_z.$$

Ainsi, on peut écrire, en posant  $\vec{\text{grad}} f|_{\text{coord}}$  la composante de  $\vec{\text{grad}} f$  suivant  $\vec{u}_{\text{coord}}$  :

$$\vec{\text{grad}} f \cdot d\vec{l} = \vec{\text{grad}} f|_r dr + \vec{\text{grad}} f|_\theta r d\theta + \vec{\text{grad}} f|_z dz,$$

expression que l'on identifie avec la première pour trouver les composantes de l'opérateur gradient dans la base cylindrique :

$$\vec{\text{grad}} f|_r = \frac{\partial f}{\partial r}, \quad \vec{\text{grad}} f|_z = \frac{\partial f}{\partial z},$$

$$\vec{\text{grad}} f|_\theta r d\theta = \frac{\partial f}{\partial \theta} d\theta, \text{ soit } \vec{\text{grad}} f|_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta}.$$



## C.4. Champs à circulation conservative

### Définition 2

Un champ de vecteurs  $\vec{W}$  est dit « à circulation conservative » lorsque sa circulation entre deux points A et B ne dépend pas du chemin suivi, mais seulement des deux points de départ et d'arrivée.

1. La démonstration est hors programme et on en admet ici le résultat.

2. En physique, le signe négatif est purement conventionnel.

3. Par exemple, le champ électrostatique étudié en première année est à circulation conservative et le champ de scalaires associé est le potentiel électrostatique.

On peut montrer<sup>1</sup> que ce champ de vecteurs n'est autre que le gradient d'un champ de scalaires  $f$  :  $\vec{W} = -\vec{\text{grad}}f$ <sup>2</sup>. Il en découle le résultat suivant :

### Propriété 2

Lorsqu'un champ de vecteurs  $\vec{W}$  est « à circulation conservative », il existe une fonction scalaire  $f$  dont ce champ est le gradient :

$$\vec{W} = -\vec{\text{grad}}f$$

## D. Opérateur divergence

### D.1. Définition

La divergence est un scalaire obtenu à partir d'un champ de vecteurs. Chaque terme correspond à une dérivation de l'une des composantes du vecteur par rapport à la coordonnée d'espace correspondante.

L'expression de la divergence d'un champ de vecteurs  $\vec{a}$  dans les divers systèmes de coordonnées est :

– En coordonnées cartésiennes  $(x, y, z)$  :

$$\text{div}(\vec{a}) = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

– En coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$  :

$$\text{div}(\vec{a}) = \frac{1}{r} \frac{\partial(r a_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial a_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

– En coordonnées sphériques  $(r, \theta, \phi)$  :

$$\text{div}(\vec{a}) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 a_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(a_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial a_\phi}{\partial \phi}$$

4. On rappelle qu'une ligne de champ est telle qu'en chacun de ses points, le vecteur lui est tangent.

5. Dans les systèmes de coordonnées cylindrique et sphérique, certains champs ont une norme variable sur leurs lignes de champ et gardent une divergence nulle. Il faut aussi considérer la seconde partie de cette interprétation.

6. Sa norme varie donc en ce point.

7. On verra que les sources du champ électrique sont les charges électriques. La divergence non nulle du champ électrique en un point est alors due à la présence en ce point d'une densité (volumique) non nulle de charges électriques.

La divergence étant un opérateur de dérivation vectorielle par rapport à une coordonnée d'espace, son unité SI est le  $\text{m}^{-1}$ .

### D.2. Signification physique

Pour mieux comprendre, on prend l'exemple le plus simple des coordonnées cartésiennes. Dans l'espace, la divergence du champ de vecteurs  $\vec{W}$  non uniforme reste nulle si la norme de  $\vec{W}$  ne varie pas lorsque l'on se déplace sur une ligne de champ<sup>4</sup>. Réciproquement, si la norme de  $\vec{W}$  varie sur une ligne de champ, alors la divergence du champ de vecteurs  $\vec{W}$  est non nulle<sup>5</sup>. La norme peut alors croître jusqu'à diverger, et on comprend mieux le concept de « divergence non nulle ».

Physiquement, si la divergence d'un champ de vecteurs est non nulle en un point<sup>6</sup>, alors il existe une source du champ en ce point<sup>7</sup>.

#### Application 4 Calcul de divergence

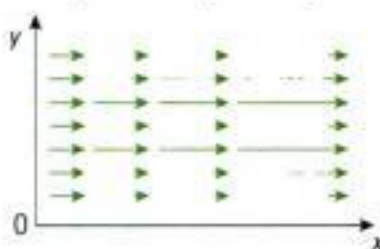
Soient les champs de vecteurs  $\vec{W} = x\vec{u}_x$  et  $\vec{W}' = y\vec{u}_x$ . Calculer leur divergence et représenter ces champs dans le plan  $xOy$ . Interpréter.

#### Solution

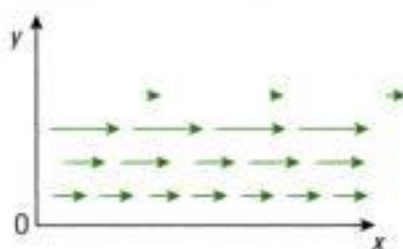
Le calcul en coordonnées cartésiennes donne directement :

$$\operatorname{div} \vec{W} = \frac{\partial W_x}{\partial x} = \frac{\partial x}{\partial x} = 1 \neq 0 \quad \text{et} \quad \operatorname{div} \vec{W}' = \frac{\partial W'_x}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial x} = 0.$$

Le tracé de ces champs dans le plan  $xOy$  donne les schémas suivants :



Champ  $\vec{W} = x\vec{u}_x$



Champ  $\vec{W}' = y\vec{u}_x$

- Le champ de vecteurs  $\vec{W} = x\vec{u}_x$  admet une divergence non nulle en tout point. On remarque que le long d'une ligne de champ, la norme du vecteur augmente pour diverger à l'infini.
- En revanche, le champ de vecteurs  $\vec{W}' = y\vec{u}_x$  admet une divergence nulle en tout point. Bien que les lignes de champ partent à l'infini, la norme du vecteur ne diverge pas (reste constante) lorsque l'on se déplace sur chacune d'elles.

1. On dit aussi « formule de Green-Ostrogradsky ».

### D.3. Formule d'Ostrogradsky<sup>1</sup>

#### Propriété 3

Le flux d'un champ  $\vec{W}$  de vecteurs à travers une surface fermée  $S$  est égal à l'intégrale de la divergence de ce champ sur le volume  $V$  délimité par cette surface (fig. 6) :

$$\oint_S \vec{W} \cdot \vec{n} \, dS = \iiint_V \operatorname{div} \vec{W} \, dV.$$



Fig. 6 - Surface fermée.

2. Voir chapitre 2, § C.2.

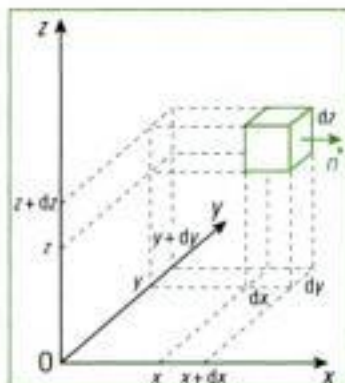


Fig. 7 - Élément de volume  $dV$ .

Cette formule est très utile en électromagnétisme, et nous verrons qu'elle permet la démonstration du théorème de Gauss<sup>2</sup>.

C'est aussi à partir de cette formule que l'on peut définir l'opérateur divergence, ou retrouver son expression. Montrons-le pour les coordonnées cartésiennes.

Si le volume considéré se réduit à un simple élément de volume  $dV$  (fig. 7), alors la sommation de l'intégrale sur le volume n'a plus lieu d'exister :

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{W} \, dV = \operatorname{div} \vec{W} \, dV,$$

et l'intégrale  $\oint_S \vec{W} \cdot \vec{n} \, dS$  devient la somme de six termes, chacun correspondant à une face du parallélépipède  $dV$ .

Appelons  $\vec{n}$  la normale sortante à la surface. Par exemple, à l'abscisse  $x + dx$ , on a  $dS = dy \, dz$  et  $\vec{n} = +\vec{u}_x$ .



L'intégrale du flux vaut alors :

$$\oint_{\text{6 faces}} \vec{W} \cdot \vec{n} dS = [W_x(x+dx) - W_x(x)] dydz + [W_y(y+dy) - W_y(y)] dx dz + [W_z(z+dz) - W_z(z)] dx dy.$$

$$\oint_{\text{6 faces}} \vec{W} \cdot \vec{n} dS = \left[ \frac{\partial W_x}{\partial x} dx \right] dydz + \left[ \frac{\partial W_y}{\partial y} dy \right] dx dz + \left[ \frac{\partial W_z}{\partial z} dz \right] dx dy.$$

$$\oint_{\text{6 faces}} \vec{W} \cdot \vec{n} dS = \left[ \frac{\partial W_x}{\partial x} + \frac{\partial W_y}{\partial y} + \frac{\partial W_z}{\partial z} \right] dV.$$

Or la formule d'Ostrogradsky donne :

$$\oint_{\text{6 faces}} \vec{W} \cdot \vec{n} dS = \text{div } \vec{W} dV,$$

et il vient donc :

$$\text{div } \vec{W} = \frac{\partial W_x}{\partial x} + \frac{\partial W_y}{\partial y} + \frac{\partial W_z}{\partial z}.$$

1. Dans les autres systèmes de coordonnées, le raisonnement est le même en considérant le parallélépipède rectangle dont les arêtes correspondent à la variation élémentaire de chacune des coordonnées.

## D.4. Champs à flux conservatif

### Définition 3

Un champ de vecteurs  $\vec{W}$  est dit « à flux conservatif » lorsque son flux  $\phi$  à travers toute surface fermée  $S$  est nul :

$$\text{pour toute surface } S \text{ fermée, } \oint_S \vec{W} \cdot d\vec{S} = 0.$$

En appliquant la formule d'Ostrogradsky, il vient :

$$\oint_S \vec{W} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \text{div } \vec{W} dV = 0, \text{ pour tout volume } V.$$

On peut donc en déduire, comme le volume  $V$  est quelconque :

### Propriété 4

Un champ de vecteurs est « à flux conservatif » si et seulement si :  
en tout point de l'espace,  $\text{div } \vec{W} = 0$ .

D'autre part, si l'on partage la surface fermée  $S$  en deux surfaces  $S_1$  et  $S_2$  ouvertes qui s'appuient sur le même contour  $\Gamma$  orienté (fig.8)<sup>3</sup>, la conservation du flux  $\phi$  du champ de vecteurs s'écrit alors :

$$\phi = \oint_S \vec{W} \cdot \vec{n} dS = \iint_{S_1} \vec{W} \cdot \vec{n} dS + \iint_{S_2} \vec{W} \cdot \vec{n} dS = 0,$$

$$\text{soit : } - \iint_{S_1} \vec{W} \cdot \vec{n}_1 dS + \iint_{S_2} \vec{W} \cdot \vec{n}_2 dS = \phi_2 - \phi_1 = 0, \text{ donc } \phi_2 = \phi_1.$$

Un champ de vecteurs est « à flux conservatif » si, pour toute surface ouverte  $S$ , son flux à travers la surface  $S$  ne dépend pas de celle-ci, mais seulement du contour sur lequel elle s'appuie.

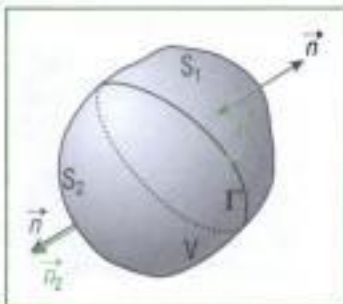


Fig. 8 - Surface  $S_1$  et  $S_2$ . Ici, on a :  $\vec{n} = -\vec{n}_1$  et  $\vec{n} = \vec{n}_2$ .

## E. Opérateur rotationnel

### E.1. Définition

Le rotationnel est un vecteur obtenu à partir d'un champ de vecteurs. Chaque composante du rotationnel correspond à des dérivations par rapport aux deux autres coordonnées d'espace.

L'expression du rotationnel d'un champ  $\vec{a}$  de vecteurs dans les divers systèmes de coordonnées est :

– En coordonnées cartésiennes  $(x, y, z)$  :

$$\vec{\text{rot}}(\vec{a}) = \left( \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) \vec{u}_x + \left( \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) \vec{u}_y + \left( \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) \vec{u}_z.$$

– En coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$  :

$$\vec{\text{rot}}(\vec{a}) = \left( \frac{1}{r} \frac{\partial a_z}{\partial \theta} - \frac{\partial a_\theta}{\partial z} \right) \vec{u}_r + \left( \frac{\partial a_r}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial r} \right) \vec{u}_\theta + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial(r a_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial a_r}{\partial \theta} \right) \vec{u}_z.$$

En coordonnées sphériques  $(r, \theta, \phi)$  :

$$\begin{aligned} \vec{\text{rot}}(\vec{a}) = & \frac{1}{r \sin \theta} \left( \frac{\partial(a_\phi \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial a_\theta}{\partial \phi} \right) \vec{u}_r + \left( \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial a_r}{\partial \phi} - \frac{1}{r} \frac{\partial(r a_\phi)}{\partial r} \right) \vec{u}_\theta \\ & + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial(r a_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial a_r}{\partial \theta} \right) \vec{u}_\phi. \end{aligned}$$

Le rotationnel étant un opérateur de dérivation vectorielle par rapport à une coordonnée d'espace, son unité SI est le  $\text{m}^{-1}$ .

## E.2. Signification physique

Pour mieux comprendre, on prend l'exemple le plus simple des coordonnées cartésiennes. Dans l'espace, si le champ de vecteurs est uniforme, son rotationnel reste nul. C'est aussi le cas si les composantes du vecteur ne varient pas quand on se déplace dans une direction qui lui est orthogonale. Mais lorsque les composantes du vecteur varient dans une direction qui lui est orthogonale, le rotationnel est non nul<sup>1</sup>.

Qualitativement, on peut dire qu'un champ de vecteurs à rotationnel non nul « tourne » ou « tend à faire tourner » les objets sensibles à l'action de ce champ.

Enfin, si le rotationnel d'un champ de vecteurs est non nul en un point, on peut dire qu'en ce point existe une source de champ.

<sup>1</sup> Dans les systèmes de coordonnées cylindrique et sphérique, certains champs ont une norme variable dans une direction orthogonale aux vecteurs et gardent un rotationnel nul.

### Application 5 Calcul de rotationnel

Soient les champs de vecteurs  $\vec{W} = x \vec{u}_x$  et  $\vec{W}' = y \vec{u}_x$ . Calculer leur rotationnel et représenter ces champs dans le plan  $xOy$ . Interpréter.

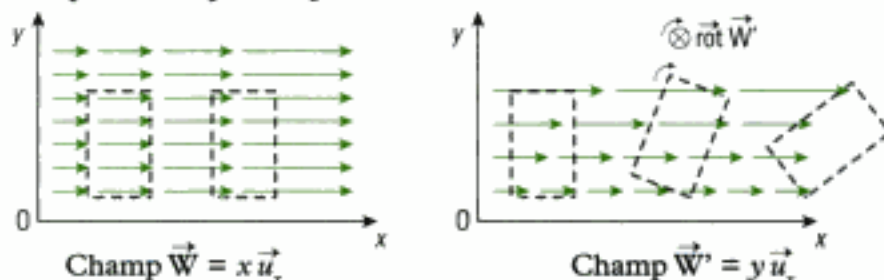
#### Solution

Le calcul en coordonnées cartésiennes donne directement :

$$\vec{\text{rot}} \vec{W} = \frac{\partial W_x}{\partial z} \vec{u}_y - \frac{\partial W_y}{\partial z} \vec{u}_x = \frac{\partial x}{\partial z} \vec{u}_y - \frac{\partial x}{\partial y} \vec{u}_x = \vec{0}.$$

$$\vec{\text{rot}} \vec{W}' = \frac{\partial W'_x}{\partial z} \vec{u}_y - \frac{\partial W'_y}{\partial z} \vec{u}_x = \frac{\partial y}{\partial z} \vec{u}_y - \frac{\partial y}{\partial y} \vec{u}_x = -\vec{u}_x \neq \vec{0}.$$

Le tracé de ces champs dans le plan  $xOy$  donne les schémas suivants :





– Le champ de vecteurs  $\vec{W}' = y\vec{u}_x$  admet un rotationnel non nul en tout point. On remarque que dans la direction de Oy, orthogonale au champ, la norme de  $\vec{W}'$  est modifiée. Plaçons un cadre dans l'espace, et supposons qu'il soit sensible au champ. On peut imaginer une planche ou un canoë dans une rivière, le champ étant le champ des vitesses de l'eau qui s'écoule. Alors le cadre aura tendance à se mettre à tourner « autour de l'axe » du rotationnel<sup>1</sup>.

– En revanche, le champ de vecteurs  $\vec{W} = x\vec{u}_x$  a un rotationnel nul en tout point. La norme du champ ne varie pas dans une direction qui lui est orthogonale, et si l'on place le même cadre dans ce champ, il ne pourra que se translater horizontalement.



En électromagnétisme, on constate souvent qu'un champ dont le rotationnel est non nul possède des lignes de champ « qui tournent ».

1. On peut se représenter le « vecteur rotation » du cadre par le rotationnel.

2. On dit aussi « formule de Stokes-Ampère ».

### E.3. Formule de Stokes<sup>2</sup>

#### Propriété 5

La circulation d'un champ de vecteurs  $\vec{W}$  le long d'un contour  $\Gamma$  est égal au flux de son rotationnel à travers toute surface ouverte  $S$  s'appuyant sur ce contour (fig.9) :

$$\oint_{\Gamma} \vec{W} \cdot d\vec{l} = \iint_S \text{rot } \vec{W} \cdot d\vec{S}.$$



Fig. 9 - Contour  $\Gamma$ .

3. Voir chapitre 2, § C.3.

4. Le contour est infiniment petit.

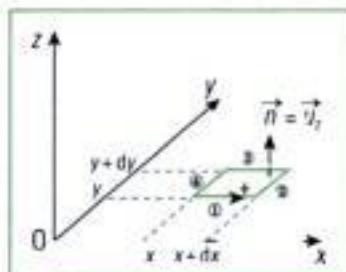


Fig. 10 - Rectangle élémentaire.

Cette formule est très utile en électromagnétisme, et nous verrons qu'elle permet la démonstration de la loi de Faraday<sup>1</sup>.

C'est aussi à partir de cette formule que l'on peut définir l'opérateur rotationnel, ou retrouver son expression. Montrons-le pour les coordonnées cartésiennes.

Étudions le rectangle élémentaire orienté situé dans le plan Oxy et de normale  $\vec{u}_z$  (fig.10). Si la surface considérée s'appuie sur ce contour simple<sup>1</sup>, alors la circulation du champ n'est plus une intégrale mais simplement une somme de quatre termes correspondant aux côtés du contour étudié.

L'intégrale de la circulation vaut alors :

$$\begin{aligned} \oint_{\text{4 cotés}} \vec{W} \cdot d\vec{l} &= \underbrace{\vec{W}(x, y) \cdot dx \vec{u}_x}_{\text{①}} + \underbrace{\vec{W}(x + dx, y) \cdot dy \vec{u}_y}_{\text{②}} \\ &\quad + \underbrace{\vec{W}(x + dx, y + dy) \cdot dx (-\vec{u}_x)}_{\text{③}} + \underbrace{\vec{W}(x, y + dy) \cdot dy (-\vec{u}_y)}_{\text{④}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \oint_{\text{4 cotés}} \vec{W} \cdot d\vec{l} &= W_x(x, y)dx + W_y(x + dx, y)dy \\ &\quad - [W_x(x, y + dy) + \frac{\partial W_x(x, y)}{\partial x} dx]dx \\ &\quad - [W_y(x, y) + \frac{\partial W_y(x, y)}{\partial y} dy]dy \end{aligned}$$

Conservons uniquement les termes infiniment petits d'ordre un, c'est-à-dire les termes en  $dx$  et  $dy$ <sup>3</sup>. Il vient donc :

$$\begin{aligned} \oint_{\text{4 cotés}} \vec{W} \cdot d\vec{l} &= [W_x(x, y) - W_x(x, y + dy)]dx + [W_y(x + dx, y) - W_y(x, y)]dy. \\ \oint_{\text{4 cotés}} \vec{W} \cdot d\vec{l} &= \left[ -\frac{\partial W_x}{\partial y} dy \right]dx + \left[ \frac{\partial W_y}{\partial x} dx \right]dy = \left[ \frac{\partial W_y}{\partial x} - \frac{\partial W_x}{\partial y} \right]dS. \end{aligned}$$

5. On rappelle que  $\vec{W}$  est une fonction vectorielle continue et à dérivées continues, les dérivées de ses composantes sont donc bornées sur la partie de l'espace étudiée.



Or la formule de Stokes donne :

$$\oint_{\Gamma} \vec{W} \cdot d\vec{l} = \iint_S \text{rot } \vec{W} \cdot d\vec{S} = \left( \text{rot } \vec{W} \right)_z dS,$$

et il vient donc :

$$\left( \text{rot } \vec{W} \right)_z = \frac{\partial W_y}{\partial x} - \frac{\partial W_x}{\partial y}.$$

C'est la composante selon Oz de  $\text{rot } \vec{W}$ . On obtient les deux autres composantes selon Ox et Oy en utilisant des rectangles élémentaires dont les normales sont respectivement  $\vec{u}_x$  et  $\vec{u}_y$ .

1. Dans les autres systèmes de coordonnées, le raisonnement est le même en considérant un contour rectangulaire dont les cotés correspondent à la variation élémentaire de deux des trois coordonnées.

## E.4. Champs à circulation conservative

### Définition 4

Un champ de vecteurs  $\vec{W}$  est dit « à circulation conservative » lorsque sa circulation C le long de toute ligne fermée (ou contour)  $\Gamma$  est nulle :

$$\text{pour tout contour } \Gamma, \oint_{\Gamma} \vec{W} \cdot d\vec{l} = 0.$$

En appliquant la formule de Stokes, il vient :

$$\oint_{\Gamma} \vec{W} \cdot d\vec{l} = \iint_S \text{rot } \vec{W} \cdot d\vec{S} = 0,$$

quelle que soit la surface ouverte S qui s'appuie sur le contour  $\Gamma$ .

On peut donc en déduire, comme la surface S est quelconque :

### Propriété 6

Un champ de vecteurs  $\vec{W}$  est « à circulation conservative » si et seulement si :

$$\text{en tout point de l'espace}^3, \text{rot } \vec{W} = \vec{0}.$$

2. En effet, la relation est aussi valable pour un contour  $\Gamma$  élémentaire (infinitement petit) n'entourant « qu'un seul point ».

3. Pierre Simon de Laplace (1749-1827), mathématicien et physicien français. Ses travaux dans le calcul intégral et différentiel étaient tournés vers l'application des mathématiques à la physique. Ses axes de recherche concernaient l'astronomie, les probabilités et la thermodynamique : il a notamment découvert la loi  $PV^\gamma = \text{Cte}$  qui porte son nom.

## F. Opérateur laplacien<sup>3</sup>

### F.1. Définition

Le laplacien est un opérateur de dérivation spatiale qui peut s'appliquer à un champ de scalaires ou à un champ de vecteurs.

### Définition 5

– L'expression du laplacien  $\Delta U$  d'un champ de scalaires U est :

$$\Delta U = \text{div}(\text{grad } U).$$

– L'expression du laplacien  $\Delta \vec{W}$  d'un champ de vecteurs  $\vec{W}$  est :

$$\Delta \vec{W} = \text{grad}(\text{div} \vec{W}) - \text{rot}(\text{rot } \vec{W}).$$

– Le laplacien d'un champ de scalaires est un scalaire et son calcul se fait en utilisant les expressions des opérateurs gradient et divergence précédemment définis.

– Le laplacien d'un champ de vecteurs est un vecteur et le calcul se fait en utilisant les expressions des opérateurs gradient, rotationnel et divergence précédemment définis.

Le calcul du laplacien  $\Delta$  d'un scalaire ou d'un champ de vecteurs nécessite une dérivée seconde par rapport à des coordonnées spatiales, son unité SI est donc le  $\text{m}^{-2}$ .

## F.2. Interprétation physique

Bien moins évidente, elle combine celle des deux opérateurs qui composent le laplacien.

En coordonnées cartésiennes, il suffit que le champ ait une variation non linéaire par rapport à une des variables pour que son laplacien soit non nul.

Dans les autres systèmes de coordonnées, la démarche est plus compliquée, car les opérateurs divergence et rotationnel ne consistent pas simplement à dériver par rapport à la coordonnée d'espace correspondante.

### Application 6 Calcul de laplacien

Soit le champ de scalaires  $U = x^2y$ . Calculer son laplacien et interpréter.

#### Solution

En coordonnées cartésiennes, le gradient s'écrit :

$$\vec{\text{grad}} U = \begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} \\ \frac{\partial U}{\partial y} \\ \frac{\partial U}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial(x^2y)}{\partial x} \\ \frac{\partial(x^2y)}{\partial y} \\ \frac{\partial(x^2y)}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xy \\ x^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le laplacien vaut donc :

$$\Delta U = \text{div}(\vec{\text{grad}} U) = \frac{\partial(2xy)}{\partial x} + \frac{\partial x^2}{\partial y} + 0 = 2y.$$

Il est non nul, car le champ de scalaires  $U$  est une fonction non linéaire de la variable  $x$ .

1. L'opérateur Nabla est hors-programme. Néanmoins, son utilisation permet de retrouver de manière idiomatique les expressions des opérateurs vus précédemment en coordonnées cartésiennes et certaines propriétés entre ces opérateurs.

## G. Opérateur Nabla<sup>1</sup>

### G.1. Définition

#### Définition 6

L'opérateur Nabla  $\vec{\nabla}$  n'est défini qu'en coordonnées cartésiennes. C'est un vecteur dont les composantes sont les dérivées partielles par rapport à la coordonnée concernée :

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} = \vec{u}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{u}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{u}_z \frac{\partial}{\partial z}.$$

– Lorsque l'opérateur  $\vec{\nabla}$  est appliqué à un champ de scalaires  $U$ , par lequel il est multiplié, on retrouve l'opérateur gradient :

$$\vec{\nabla}U = \begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} \\ \frac{\partial U}{\partial y} \\ \frac{\partial U}{\partial z} \end{pmatrix} = \vec{\text{grad}} U.$$

– Lorsque l'opérateur  $\vec{\nabla}$  est appliqué à un champ de vecteurs  $\vec{W}$ , la « multiplication » peut être un produit scalaire ou un produit vectoriel. On reconnaît alors respectivement les opérateurs divergence et rotationnel :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{W} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} W_x \\ W_y \\ W_z \end{pmatrix} = \frac{\partial W_x}{\partial x} + \frac{\partial W_y}{\partial y} + \frac{\partial W_z}{\partial z} = \text{div } \vec{W}.$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{W} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} W_x \\ W_y \\ W_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial W_z}{\partial y} - \frac{\partial W_y}{\partial z} \\ \frac{\partial W_x}{\partial z} - \frac{\partial W_z}{\partial x} \\ \frac{\partial W_y}{\partial x} - \frac{\partial W_x}{\partial y} \end{pmatrix} = \vec{\text{rot}} \vec{W}.$$

– Enfin, le laplacien scalaire s'écrit :

$$\Delta U = \text{div}(\vec{\text{grad}} U) = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} U = \vec{\nabla}^2 U, \text{ soit } \Delta = \vec{\nabla}^2.$$

## G.2. Utilité de Nabla

– Grâce à l'opérateur Nabla, on peut trouver simplement le résultat de composition de divers opérateurs ainsi, pour un champ de scalaires  $U$  :

1. Le produit vectoriel de deux vecteurs colinéaires est nul !

$$\vec{\text{rot}}(\vec{\text{grad}} U) = \vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} U = \vec{0}^1.$$

On admet la réciproque suivante, utilisée en électromagnétisme :

### Propriété 7

Si un champ de vecteurs  $\vec{W}$  est à rotationnel nul ( $\vec{\text{rot}} \vec{W} = \vec{0}$ ), alors il existe un champ de scalaires  $U$  dont il est le gradient :

$$\vec{W} = - \vec{\text{grad}} U^2.$$

Le champ de scalaires  $U$  est appelé **potentiel scalaire** du champ de vecteurs<sup>3</sup>.

2. En physique, le signe négatif est purement conventionnel. Le champ électrostatique possède un potentiel scalaire (voir le cours de première année) ; on vérifiera cette année que son rotationnel est nul.

3. On dit que  $\vec{W}$  « dérive » de  $U$ .

On remarque que si  $\vec{W} = -\vec{\text{grad}}U$ , alors le champ de vecteurs  $\vec{W}$  est à circulation conservative<sup>1</sup> :

1. Voir § C.4 de ce chapitre.

$$\int_A^B \vec{W} \cdot d\vec{l} = \int_A^B -\vec{\text{grad}}U \cdot d\vec{l} = U(A) - U(B).$$

– Une démarche analogue permet d'écrire, pour un champ de vecteurs  $\vec{W}$  :

$$\text{div}(\vec{\text{rot}} \vec{W}) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{W}) = 0.$$

En effet, le produit vectoriel de deux vecteurs est orthogonal à chacun des deux vecteurs qui le constitue<sup>2</sup>, et son produit scalaire par l'un de ces deux vecteurs est nul.

On admet de même la réciproque suivante :

#### Propriété 8

Si un champ de vecteurs  $\vec{W}$  est à divergence nulle ( $\text{div} \vec{W} = 0$ ), alors il existe un champ de vecteurs  $\vec{A}$  dont il est le rotationnel :

$$\vec{W} = \vec{\text{rot}} \vec{A}.$$

Le champ de vecteurs  $\vec{A}$  est appelé **potentiel vecteur** du champ de vecteurs<sup>3</sup>.

3. Comme  $\vec{W} = \vec{\text{rot}} \vec{A} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$ , le champ de vecteurs et son potentiel vecteur sont orthogonaux en tout point.

– Enfin, si on applique la formule du double produit vectoriel :

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c}$$

au double rotationnel, on obtient :

$$\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}} \vec{W}) = \vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{W}) = \vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \cdot \vec{W}) - (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}) \vec{W},$$

soit :

$$\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}} \vec{W}) = \vec{\text{grad}}(\text{div} \vec{W}) - \Delta \vec{W}.$$

4. On reconnaît la formule de définition du laplacien vectoriel.



# L'essentiel

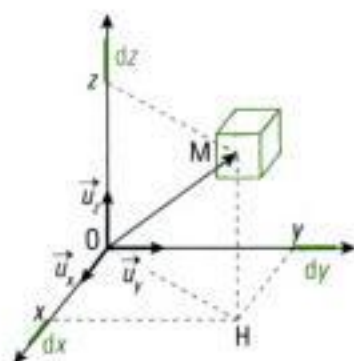
## ✓ Systèmes de coordonnées

- En coordonnées cartésiennes  $(x, y, z)$ , on a :

$$\vec{OM} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z.$$

Une variation élémentaire  $dx$ ,  $dy$  ou  $dz$  de chacune des coordonnées produit un déplacement respectif de  $dx\vec{u}_x$ ,  $dy\vec{u}_y$  ou  $dz\vec{u}_z$ .

Élément de volume :  $dV = dx \times dy \times dz$ .

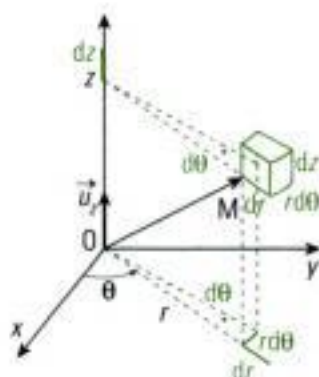


- En coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$ , on a :

$$\vec{OM} = r\vec{u}_r + z\vec{u}_z.$$

Une variation élémentaire  $dr$ ,  $d\theta$  ou  $dz$  de chacune des coordonnées produit un déplacement respectif de  $dr\vec{u}_r$ ,  $r d\theta\vec{u}_\theta$  ou  $dz\vec{u}_z$ .

Élément de volume :  $dV = dr \times r d\theta \times dz$ .

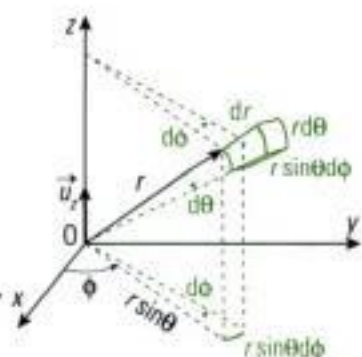


- En coordonnées sphériques  $(r, \theta, \phi)$ , on a :

$$\vec{OM} = r\vec{u}_r.$$

Une variation élémentaire  $dr$ ,  $d\theta$  ou  $d\phi$  de chacune des coordonnées produit un déplacement respectif de  $dr\vec{u}_r$ ,  $r d\theta\vec{u}_\theta$  ou  $r \sin\theta d\phi\vec{u}_\phi$ .

Élément de volume :  $dV = dr \times r d\theta \times r \sin\theta d\phi$ .



- Application du théorème de Fubini :

$$\iiint f(x)g(y)h(z)dx dy dz = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx \int_{y_0}^{y_1} g(y)dy \int_{z_0}^{z_1} h(z)dz.$$

## ✓ Opérateurs d'analyse vectorielle

- Le **gradient** est un vecteur obtenu à partir d'un champ de scalaires  $U$ .

En coordonnées cartésiennes, le gradient s'écrit :

$$\vec{\text{grad}}U = \vec{\nabla}U.$$

Le gradient est non nul lorsque le champ  $U$  n'est pas uniforme, son orientation étant celle des valeurs croissantes du champ  $U$ .

– Le gradient est à circulation conservative. Entre deux points A et B, on a, quel que soit le chemin suivi :

$$\int_A^B \vec{\text{grad}}U \cdot d\vec{l} = U(B) - U(A).$$



• La **divergence** est un scalaire obtenu à partir d'un champ de vecteurs. En coordonnées cartésiennes, la divergence s'écrit :

$$\operatorname{div} \vec{W} = \vec{\nabla} \cdot \vec{W}.$$

- Lorsque la divergence est non nulle, la norme du vecteur varie le long des lignes de champ.
- **Formule d'Ostrogradsky** : le flux d'un champ de vecteurs  $\vec{W}$  à travers une surface fermée  $S$  est égal à l'intégrale de la divergence de ce champ sur le volume  $V$  délimité par cette surface :

$$\oint_S \vec{W} \cdot \vec{n} \, dS = \iiint_V \operatorname{div} \vec{W} \, dV.$$

**Conséquence** : un champ de vecteurs à divergence nulle ( $\operatorname{div} \vec{W} = 0$ ) est à **flux conservatif** : son flux  $\oint_S \vec{W} \cdot \vec{n} \, dS$  à travers toute surface fermée est nul et son flux à travers toute surface ouverte ne dépend pas de cette surface, mais seulement du contour sur lequel elle s'appuie.

- Un champ de vecteurs  $\vec{W}$  à divergence nulle ( $\operatorname{div} \vec{W} = 0$ ) possède un **potentiel vecteur**  $\vec{A}$  tel que :

$$\vec{W} = \operatorname{rot} \vec{A}.$$

- Pour un champ de vecteurs  $\vec{W}$ , on a les équivalences suivantes :

$$\vec{W} \text{ est à flux conservatif} \Leftrightarrow \operatorname{div} \vec{W} = 0 \text{ en tout point} \Leftrightarrow \exists \vec{A} / \vec{W} = \operatorname{rot} \vec{A}.$$

• Le **rotationnel** est un vecteur obtenu à partir d'un champ de vecteurs. En coordonnées cartésiennes, le rotationnel s'écrit :

$$\operatorname{rot} \vec{W} = \vec{\nabla} \wedge \vec{W}.$$

- Les vecteurs  $\operatorname{rot} \vec{W}$  et  $\vec{W}$  sont donc orthogonaux.
- Lorsque le rotationnel est non nul, la norme du vecteur ne reste pas constante dans une direction orthogonale à celle du vecteur. Généralement, les lignes de champ d'un champ de vecteurs à rotationnel non nul « tournent ».
- **Formule de Stokes** : la circulation d'un champ de vecteurs  $\vec{W}$  le long d'un contour  $\Gamma$  est égal au flux de son rotationnel à travers toute surface ouverte  $S$  s'appuyant sur ce contour :

$$\oint_{\Gamma} \vec{W} \cdot d\vec{l} = \iint_S \operatorname{rot} \vec{W} \cdot d\vec{S}.$$

**Conséquence** : un champ de vecteurs à rotationnel nul ( $\operatorname{rot} \vec{W} = 0$ ) est à **circulation conservative** : sa circulation le long de toute ligne fermée est nulle et sa circulation entre deux points ne dépend pas du chemin suivi, mais seulement du point de départ et d'arrivée.

- Un champ de vecteurs à rotationnel nul ( $\operatorname{rot} \vec{W} = 0$ ) possède un **potentiel scalaire**  $U$  tel que :

$$\vec{W} = -\operatorname{grad} U.$$

- Pour un champ de vecteurs  $\vec{W}$ , on a les équivalences suivantes :

$$\vec{W} \text{ est à circulation conservative} \Leftrightarrow \operatorname{rot} \vec{W} = 0 \text{ en tout point} \Leftrightarrow \exists U / \vec{W} = -\operatorname{grad} U.$$

• Le **laplacien** est un scalaire obtenu à partir d'un champ de scalaires ou un vecteur obtenu à partir d'un champ de vecteurs. En coordonnées cartésiennes, le laplacien s'écrit :

$$\Delta U = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} U = \vec{\nabla}^2 U \text{ si } U \text{ est un champ de scalaires,}$$

$$\Delta \vec{W} = \begin{pmatrix} \Delta W_x \\ \Delta W_y \\ \Delta W_z \end{pmatrix} \text{ si } \vec{W} \text{ est un champ de vecteurs.}$$

# Formulaire

On regroupe et explicite dans ce formulaire les expressions de tous les opérateurs d'analyse vectorielle dans les trois systèmes de coordonnées usuels. Soient  $U$  un champ de scalaire et  $\vec{W}$  un champ de vecteurs.

## ✓ En coordonnées cartésiennes $(x, y, z)$

$$\bullet \vec{\text{grad}} U = \frac{\partial U}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{u}_y + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{u}_z = \begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} \\ \frac{\partial U}{\partial y} \\ \frac{\partial U}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$\bullet \text{div } \vec{W} = \frac{\partial W_x}{\partial x} + \frac{\partial W_y}{\partial y} + \frac{\partial W_z}{\partial z}$$

$$\bullet \vec{\text{rot}} \vec{W} = \begin{pmatrix} \frac{\partial W_z}{\partial y} - \frac{\partial W_y}{\partial z} \\ \frac{\partial W_x}{\partial z} - \frac{\partial W_z}{\partial x} \\ \frac{\partial W_y}{\partial x} - \frac{\partial W_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$$\bullet \Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

$$\bullet \vec{\Delta W} = \begin{pmatrix} \Delta W_x \\ \Delta W_y \\ \Delta W_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 W_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W_x}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 W_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W_y}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 W_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W_z}{\partial z^2} \end{pmatrix}$$

## ✓ En coordonnées cylindriques $(r, \theta, z)$

$$\bullet \vec{\text{grad}} U = \frac{\partial U}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{u}_z = \begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \\ \frac{\partial U}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$\bullet \text{div } \vec{W} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rW_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial W_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial W_z}{\partial z}$$

$$\bullet \vec{\text{rot}} \vec{W} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} \frac{\partial W_z}{\partial \theta} - \frac{\partial W_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial W_z}{\partial z} - \frac{\partial W_r}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial(rW_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial W_r}{\partial \theta} \end{pmatrix}$$

$$\bullet \Delta U = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

✓ En coordonnées sphériques  $(r, \theta, \phi)$

$$\bullet \vec{\text{grad}} U = \frac{\partial U}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \phi} \vec{u}_\phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \phi} \end{pmatrix}$$

$$\bullet \text{div} \vec{W} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 W_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(W_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial W_\phi}{\partial \phi}$$

$$\bullet \vec{\text{rot}} \vec{W} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r \sin \theta} \left( \frac{\partial(W_\phi \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial W_\theta}{\partial \phi} \right) \\ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial W_r}{\partial \phi} - \frac{1}{r} \frac{\partial(r W_\phi)}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \left( \frac{\partial(r W_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial W_r}{\partial \theta} \right) \end{pmatrix}$$

$$\bullet \Delta U = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2}$$

✓ Relations entre opérateurs

$$\bullet \text{div}(\vec{\text{rot}} \vec{W}) = 0.$$

$$\bullet \vec{\text{rot}}(\vec{\text{grad}} U) = \vec{0}.$$

$$\bullet \Delta U = \text{div}(\vec{\text{grad}} U).$$

$$\bullet \Delta \vec{W} = \vec{\text{grad}}(\text{div} \vec{W}) - \vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}} \vec{W}).$$

$$\bullet \vec{\text{grad}}(UV) = U \vec{\text{grad}}(V) + V \vec{\text{grad}}(U).$$

$$\bullet \text{div}(U \vec{W}) = \vec{W} \cdot \vec{\text{grad}}(U) + U \text{div} \vec{W}.$$

$$\bullet \vec{\text{rot}}(U \vec{W}) = U \vec{\text{rot}} \vec{W} + \vec{\text{grad}} U \wedge \vec{W}.$$

$$\bullet \text{div}(\vec{W} \wedge \vec{V}) = \vec{V} \cdot \vec{\text{rot}} \vec{W} - \vec{W} \cdot \vec{\text{rot}} \vec{V}.$$



# Exercices

## Ex. 1 Circulation conservative

Montrer que le gradient d'un champ de scalaires  $U$  est à circulation conservative.

## Ex. 2 Flux conservatif

Montrer que le rotationnel d'un champ de vecteurs  $\vec{W}$  est un champ à flux conservatif.

## Ex. 3 Gradient en coordonnées cylindriques

Soit un champ de scalaires  $U$  défini dans tout l'espace.

On note :

$$dU = \frac{\partial U}{\partial r} dr + \frac{\partial U}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial U}{\partial \phi} d\phi$$

la différentielle de  $U$ .

- 1) Exprimer  $dU$  en fonction de l'opérateur gradient.
- 2) Donner l'expression du déplacement élémentaire  $\vec{dr}$  en coordonnées sphériques.
- 3) À partir de l'expression mathématique de la différentielle de  $U$  et de son expression en fonction du gradient, en déduire les trois composantes du gradient d'un champ de scalaires  $U$  dans le système des coordonnées sphériques.

## Ex. 4 Divergence en coordonnées cylindriques

On se propose d'étudier l'opérateur divergence dans le système des coordonnées cylindriques.

- 1) Que représente l'opérateur divergence du champ de vecteurs  $\vec{W}$  en terme de flux ?
- 2) Représenter un élément de volume  $dV$  en coordonnées cylindriques.
- 3) Calculer le flux du vecteur  $\vec{W}$  à travers l'élément de volume.
- 4) En déduire l'expression de la divergence du champ de vecteurs  $\vec{W}$  en coordonnées cylindriques.

## Ex. 5 Rotationnel en coordonnées cylindriques

On se propose d'étudier la composante orthoradiale (suivant  $\vec{u}_\theta$ ) du rotationnel d'un champ de vecteurs  $\vec{W}$  dans le système des coordonnées cylindriques.

- 1) Que représente l'opérateur rotationnel du champ de vecteurs  $\vec{W}$  en termes de circulation ?
- 2) Quel est le contour adapté à l'étude de la composante orthoradiale de l'opérateur rotationnel ?
- 3) En déduire l'expression de cette composante orthoradiale.

# Solutions des exercices

## Exercice 1

Montrons que la circulation de  $\vec{\text{grad}}U$  entre deux points A et B ne dépend pas du chemin suivi entre ces deux points.

• Soit un contour fermé  $\Gamma$  sur lequel est défini en tout point  $\vec{\text{grad}}U$ . La circulation de ce vecteur le long du contour fermé  $\Gamma$  s'écrit  $\oint_{\Gamma} \vec{\text{grad}}U \cdot d\vec{r}$ , où  $d\vec{r}$  représente un déplacement élémentaire le long du contour.

Or, par définition,  $dU = \vec{\text{grad}}U \cdot d\vec{r}$ .

Donc  $\oint_{\Gamma} \vec{\text{grad}}U \cdot d\vec{r} = \oint_{\Gamma} dU = 0$ , puisque le contour est fermé.

• Soit maintenant deux lignes  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  quelconques reliant deux points A et B de l'espace et orientées de A vers B. Leur réunion forme un contour fermé  $\Gamma$  le long duquel la circulation du vecteur gradient est nulle :

$$\begin{aligned} 0 &= \oint_{\Gamma} \vec{\text{grad}}U \cdot d\vec{r} = \int_{\Gamma_1} \vec{\text{grad}}U \cdot d\vec{r} + \int_{\Gamma_2} \vec{\text{grad}}U \cdot d\vec{r} \\ &= \int_{\Gamma_1} \vec{\text{grad}}U \cdot d\vec{r}_1 + \int_{\Gamma_2} \vec{\text{grad}}U \cdot (-d\vec{r}_2), \end{aligned}$$

d'où on en déduit :

$$\int_{\Gamma_1} \vec{\text{grad}}U \cdot d\vec{r}_1 = \int_{\Gamma_2} \vec{\text{grad}}U \cdot d\vec{r}_2.$$

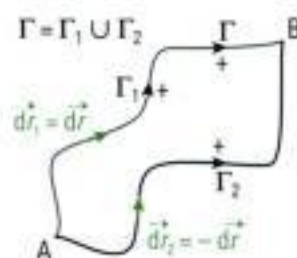


Sur la ligne  $\Gamma_2$ , on intègre du point B vers le point A, donc dans le sens opposé au contour : on prend alors un déplacement élémentaire  $d\vec{r}_2 = -d\vec{r}$ .

La circulation du gradient ne dépend pas du chemin suivi entre les points A et B, c'est donc un vecteur à circulation conservative.



On a aussi vu en cours que la réciproque est vérifiée (propriété 2).



## Exercice 2

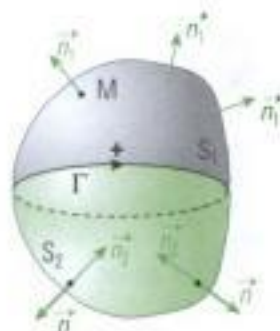
Montrons que le flux de  $\vec{\text{rot}} \vec{W}$  à travers deux surfaces quelconques s'appuyant sur un même contour est égal.

Soit deux surfaces distinctes  $S_1$  et  $S_2$  s'appuyant sur le contour fermé  $\Gamma$ , leur réunion formant une surface  $S$  fermée.

Le flux de  $\vec{\text{rot}} \vec{W}$  à travers la surface fermée  $S$  s'écrit  $\oint_S \vec{\text{rot}} \vec{W} \cdot d\vec{S}$ , où  $d\vec{S} = \vec{n} dS$  représente un élément de surface  $S$  et  $\vec{n}$  sa normale.

De même, le flux de  $\vec{\text{rot}} \vec{W}$  à travers la surface ouverte  $S_1$  s'écrit  $\iint_{S_1} \vec{\text{rot}} \vec{W} \cdot d\vec{S}_1$ , où  $d\vec{S}_1 = \vec{n}_1 dS$  représente un élément de surface  $S_1$  et  $\vec{n}_1$  la normale respective.

D'après la formule d'Ostrogradsky,  $\oint_S \vec{\text{rot}} \vec{W} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \text{div}(\vec{\text{rot}} \vec{W}) dV$ , où  $V$  représente le volume délimité par la surface fermée  $S$ .



Or le formulaire indique que  $\text{div}(\vec{\text{rot}} \vec{W}) = 0$ .



Pour se souvenir de cette propriété, on raisonne en coordonnées cartésiennes :

$$\text{div}(\vec{\text{rot}} \vec{W}) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{W}) = 0,$$

d'après les propriétés combinées des produits scalaires et vectoriels.

Donc  $\oint_S \vec{\text{rot}} \vec{W} \cdot d\vec{S} = 0$ .

La surface  $S$  est orientée vers l'extérieur du volume, alors que les surfaces  $S_1$  et  $S_2$  sont orientées par le contour comme indiqué sur le schéma, avec  $d\vec{S}_1 = d\vec{S}$  et  $d\vec{S}_2 = -d\vec{S}$ . D'où :

$$0 = \oint_S \vec{\text{rot}} \vec{W} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_1} \vec{\text{rot}} \vec{W} \cdot d\vec{S} + \iint_{S_2} \vec{\text{rot}} \vec{W} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_1} \vec{\text{rot}} \vec{W} \cdot d\vec{S}_1 + \iint_{S_2} \vec{\text{rot}} \vec{W} \cdot (-d\vec{S}_2).$$

On en conclut :

$$\iint_{S_1} \vec{\text{rot}} \vec{W} \cdot d\vec{S}_1 = \iint_{S_2} \vec{\text{rot}} \vec{W} \cdot d\vec{S}_2.$$

Le flux du rotationnel ne dépend pas de la surface ouverte s'appuyant sur le contour  $S$ , c'est donc un vecteur à flux conservatif.



On a aussi vu que la réciproque est vraie (propriété 8). En effet, si un champ  $\vec{W}$  est à flux conservatif, alors  $\text{div} \vec{W} = 0$ .

### Exercice 3

1) Par définition, si on considère un déplacement élémentaire  $d\vec{r}$  le long d'un contour quelconque :

$$\vec{\text{grad}} U \cdot d\vec{r} = dU.$$

2) En coordonnées sphériques, le déplacement élémentaire  $d\vec{r}$  s'écrit :

$$d\vec{r} = dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + r \sin\theta d\phi \vec{u}_\phi.$$

3) D'après l'énoncé,  $dU = \frac{\partial U}{\partial r} dr + \frac{\partial U}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial U}{\partial \phi} d\phi$ .

Or, par définition,  $\vec{\text{grad}} U \cdot d\vec{r} = dU$ .

Avec  $\vec{\text{grad}} U = \left( \vec{\text{grad}} U \right)_r \vec{u}_r + \left( \vec{\text{grad}} U \right)_\theta \vec{u}_\theta + \left( \vec{\text{grad}} U \right)_\phi \vec{u}_\phi$ , on a :

$$dU = \left( \vec{\text{grad}} U \right)_r dr + \left( \vec{\text{grad}} U \right)_\theta r d\theta + \left( \vec{\text{grad}} U \right)_\phi r \sin\theta d\phi = \frac{\partial U}{\partial r} dr + \frac{\partial U}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial U}{\partial \phi} d\phi.$$

Par identification, on obtient :

$$\left( \vec{\text{grad}} U \right)_r = \frac{\partial U}{\partial r} \quad ; \quad \left( \vec{\text{grad}} U \right)_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \quad \text{et} \quad \left( \vec{\text{grad}} U \right)_\phi = \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial U}{\partial \phi}.$$



On retrouve bien les expressions données dans le formulaire. La démarche de cet exercice est une démarche très générale qui permet de retrouver les composantes du gradient dans tout système de coordonnées.

### Exercice 4

1) Pour toute surface fermée  $S$ , la formule d'Ostrogradsky permet d'écrire :

$$\oint_S \vec{W} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \text{div} \vec{W} dV,$$

où  $V$  est le volume délimité par la surface  $S$ .



Donc, si on considère l'intégration sur un volume élémentaire  $dV$ , on en déduit :

$$\operatorname{div} \vec{W} dV = \oint_S \vec{W} \cdot d\vec{S}.$$

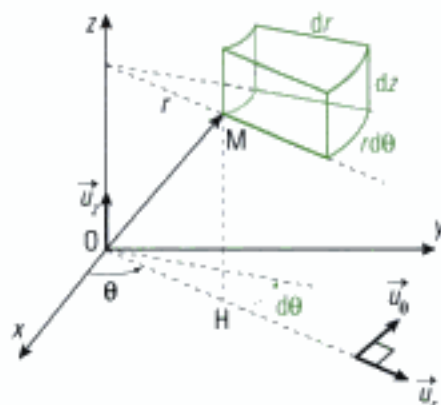
**L'opérateur divergence représente donc le flux du vecteur  $\vec{W}$  à travers la surface fermée entourant un élément de volume.**

2) En coordonnées cylindriques, l'élément de volume est une portion de cylindre que l'on assimile à un parallélépipède rectangle de volume élémentaire  $dV = dr \times r d\theta \times dz$ .

3) Pour calculer le flux total du vecteur  $\vec{W}$  à travers le volume, on ajoute les flux à travers chacune des six faces du parallélépipède. On reprend l'élément de volume représenté à la question 2). Il est important de se rappeler que la surface entourant le volume est une surface fermée orientée de l'intérieur vers l'extérieur du volume.



On raisonne par paires de faces opposées sur l'élément de volume. Chaque paire correspond à la variation élémentaire d'une coordonnée.



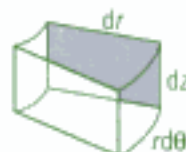
#### • Variations de $\theta$

Pour la face colorée en vert sur le dessin ci-contre, le flux de  $\vec{W}$  est égal à :

$$\vec{W} \cdot d\vec{S} = \vec{W}(r, \theta, z) \cdot dS(-\vec{u}_\theta) = -W_\theta(r, \theta, z) dr dz.$$

Pour la face colorée en gris sur le dessin ci-contre, le flux de  $\vec{W}$  est égal à :

$$\vec{W} \cdot d\vec{S} = \vec{W}(r, \theta + d\theta, z) \cdot dS \vec{u}_\theta = W_\theta(r, \theta + d\theta, z) dr dz.$$



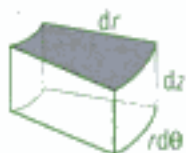
#### • Variations de $z$

Pour la face colorée en vert sur le dessin ci-contre, le flux de  $\vec{W}$  est égal à :

$$\vec{W} \cdot d\vec{S} = \vec{W}(r, \theta, z) \cdot dS(-\vec{u}_z) = -W_z(r, \theta, z) r dr d\theta.$$

Pour la face colorée en gris sur le dessin ci-contre, le flux de  $\vec{W}$  est égal à :

$$\vec{W} \cdot d\vec{S} = \vec{W}(r, \theta, z + dz) \cdot dS \vec{u}_z = W_z(r, \theta, z + dz) r dr d\theta.$$



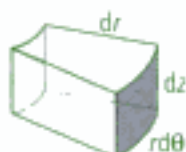
#### • Variations de $r$

Pour la face colorée en vert sur le dessin ci-contre, le flux de  $\vec{W}$  est égal à :

$$\vec{W} \cdot d\vec{S} = \vec{W}(r, \theta, z) \cdot dS(-\vec{u}_r) = -W_r(r, \theta, z) r d\theta dz.$$

Pour la face colorée en gris sur le dessin ci-contre, le flux de  $\vec{W}$  est égal à :

$$\vec{W} \cdot d\vec{S} = \vec{W}(r + dr, \theta, z) \cdot dS \vec{u}_r = W_r(r + dr, \theta, z) r d\theta dz.$$



Donc le flux total de vaut :

$$\oint_S \vec{W} \cdot d\vec{S} = \left[ W_r(r + dr, \theta, z) - W_r(r, \theta, z) \right] r d\theta dz + \left[ W_\theta(r, \theta + d\theta, z) - W_\theta(r, \theta, z) \right] dr dz + \left[ W_z(r, \theta, z + dz) - W_z(r, \theta, z) \right] r dr d\theta.$$

Or, si  $dr$  est suffisamment petit,  $\frac{W_r(r + dr, \theta, z) - W_r(r, \theta, z)}{dr} = \frac{\partial W_r}{\partial r}(r, \theta, z).$

De même, pour les autres termes :

$$\frac{W_\theta(r, \theta + d\theta, z) - W_\theta(r, \theta, z)}{d\theta} = \frac{\partial W_\theta}{\partial \theta}(r, \theta, z)$$

et

$$\frac{W_z(r, \theta, z + dz) - W_z(r, \theta, z)}{dz} = \frac{\partial W_z}{\partial z}(r, \theta, z).$$



En effet, mathématiquement, la dérivée d'une fonction se définit par la limite du rapport :

$$\lim_{dx \rightarrow 0} \frac{f(x+dx) - f(x)}{dx} = \frac{df(x)}{dx}.$$

On en conclut que :

$$\oint_S \vec{W} \cdot d\vec{S} = \left( \frac{\partial W_r}{\partial r}(r, \theta, z) + \frac{1}{r} \frac{\partial W_\theta}{\partial \theta}(r, \theta, z) + \frac{\partial W_z}{\partial z}(r, \theta, z) \right) dV.$$

4) Or, d'après la question 1), on a :

$$\text{div} \vec{W} dV = \oint_S \vec{W} \cdot d\vec{S}.$$

Donc :

$$\text{div} \vec{W} = \frac{\partial W_r}{\partial r}(r, \theta, z) + \frac{1}{r} \frac{\partial W_\theta}{\partial \theta}(r, \theta, z) + \frac{\partial W_z}{\partial z}(r, \theta, z).$$



On retrouve bien l'expression donnée dans le formulaire. La démarche de cet exercice est une démarche très générale qui permet de retrouver l'expression de la divergence dans tout système de coordonnées.

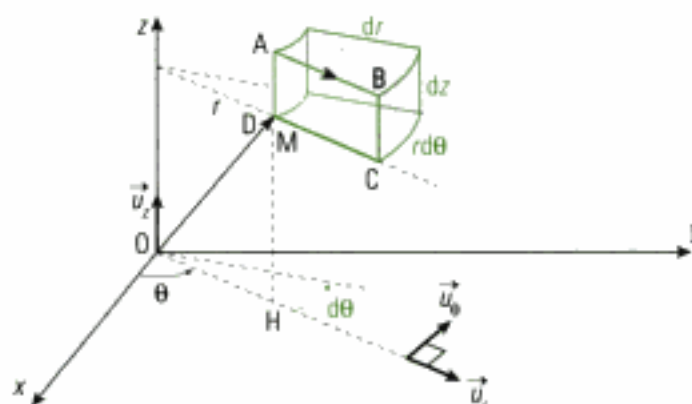
## Exercice 5

1) Pour tout contour fermé  $\Gamma$ , la formule de Stokes permet d'écrire :

$$\oint_\Gamma \vec{W} \cdot d\vec{l} = \iint_S \text{rot} \vec{W} \cdot d\vec{S},$$

où  $S$  est une surface ouverte quelconque s'appuyant sur le contour  $\Gamma$ . **Le flux du rotationnel de  $\vec{W}$  à travers une surface élémentaire est donc égal à la circulation du vecteur  $\vec{W}$  le long du contour sur lequel s'appuie cette surface.**

2) On cherche les composantes orthoradiales du rotationnel de  $\vec{W}$ . Pour cela, il faut donc considérer une surface orientée de normale  $\vec{u}_\theta$ , c'est-à-dire par exemple la surface représentée en vert sur le schéma ci-dessus. Le contour adapté est alors le contour  $\Gamma$  représenté en vert.



3) On suppose que le contour élémentaire a des dimensions faibles, de sorte que l'on peut considérer que  $\vec{W} \cdot d\vec{l} = W_l dl$ , où  $W_l$  représente la composante du vecteur  $\vec{W}$  dans la direction du vecteur  $d\vec{l}$ .

Afin de calculer la circulation, on a orienté le contour dans le sens ABCD indiqué sur le schéma.

On trouve :

$$\begin{aligned} \oint_r \vec{W} \cdot d\vec{l} &= \vec{W} \cdot \vec{AB} + \vec{W} \cdot \vec{BC} + \vec{W} \cdot \vec{CD} + \vec{W} \cdot \vec{DA} \\ &= W_r(r, \theta, z + dz)dr - W_z(r + dr, \theta, z)dz - W_r(r, \theta, z)dr + W_z(r, \theta, z)dz. \end{aligned}$$

Or,

$$\frac{W_z(r + dr, \theta, z) - W_z(r, \theta, z)}{dr} = \frac{\partial W_z}{\partial r}(r, \theta, z)$$

et

$$\frac{W_r(r, \theta, z + dz) - W_r(r, \theta, z)}{dz} = \frac{\partial W_r}{\partial z}(r, \theta, z).$$

On en déduit :

$$\oint_r \vec{W} \cdot d\vec{l} = \left( \frac{\partial W_z}{\partial r}(r, \theta, z) - \frac{\partial W_r}{\partial z}(r, \theta, z) \right) dr dz.$$

Comme  $\oint_r \vec{W} \cdot d\vec{l} = \iint_S \text{rot } \vec{W} \cdot d\vec{S} = \iint_S \text{rot } \vec{W} \cdot dS \vec{u}_\theta = \text{rot } \vec{W} \Big|_\theta dr dz$ , on en conclut :

$$\text{rot } \vec{W} \Big|_\theta = \frac{\partial W_z}{\partial r}(r, \theta, z) - \frac{\partial W_r}{\partial z}(r, \theta, z).$$



On retrouve bien l'expression donnée dans le formulaire. La démarche de cet exercice est une démarche très générale qui permet de retrouver les composantes du rotationnel dans tout système de coordonnées.





# Les équations locales de l'électromagnétisme

## Introduction

D'un point de vue historique, on constate que les lois physiques de l'électromagnétisme ont été découvertes sans liaison les unes avec autres et de manière incomplète (champ électrostatique, champ magnétostatique). De cet ensemble disparate de lois, Maxwell en a tiré des équations plus générales. Il a été avéré par la suite qu'il était possible de démontrer toutes les lois de l'électromagnétisme à partir des seules équations de Maxwell. En postulant d'abord ces équations, c'est cette démarche inverse à l'évolution historique, qui permet un raisonnement déductif, que l'on propose dans ce cours. Il suffit donc, pour accéder à l'ensemble des lois ou théorèmes de l'électromagnétisme, d'admettre les quatre équations de Maxwell. Cela est possible car ces équations locales sont des équations vectorielles valables en tout point de l'espace, dans tout milieu, et à tout instant.

Les équations de Maxwell relient les deux composantes  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  du champ électromagnétique à leurs sources, les densités de charges et de courants.

La démarche du cours, conforme au programme, met l'accent sur l'interprétation physique des équations mathématiques, plutôt que sur l'aspect calculatoire ou théorique.

### Plan du chapitre 2

A. Les sources de champ électromagnétique .....	34
B. Les équations de Maxwell .....	40
C. Formulation intégrale des équations de Maxwell .....	44
D. Étude des potentiels .....	46
E. Relations de passage du champ électromagnétique .....	46
F. Généralités sur la statique .....	47
G. Quelques dispositifs électrostatiques .....	50
H. Compléments de magnétostatique .....	55
I. Approximation des Régimes Quasi-Stationnaires .....	63
J. Étude énergétique .....	66
<b>Méthodes</b>	
L'essentiel ; mise en œuvre .....	69
<b>Énoncés des exercices</b> .....	80
<b>Indications</b> .....	85
<b>Solutions des exercices</b> .....	86

# A. Les sources de champ électromagnétique

Ce sont les charges électriques. Parmi elles, on distingue les charges mobiles et les charges fixes. Lorsqu'on parlera de charges électriques, il s'agira de celles qui sont fixes, car les autres définissent par leur mouvement le courant électrique.

## A.1. Échelle d'observation et continuité

À l'échelle atomique, deux noyaux d'atomes voisins sont séparés par du vide. Alors que la dimension du noyau est de l'ordre de  $10^{-15}$  m, la distance entre deux noyaux les plus proches est d'environ  $10^{-10}$  m. La masse étant concentrée en quasi-totalité dans les noyaux (de masse très supérieure à celle des électrons), on en déduit que la matière est concentrée dans de petits espaces séparés de vide : **la masse est donc discontinue à l'échelle atomique.**

À l'échelle macroscopique, c'est-à-dire à l'échelle de mesure que notre œil peut appréhender (le centimètre ou le mètre), une planche nous paraît homogène et la discontinuité précédente n'est pas ressentie. Il en est de même à l'échelle dite « mésoscopique » du micromètre, très grande devant l'échelle atomique, mais infinitésimale devant l'échelle macroscopique.

Un élément de volume « mésoscopique »  $dt$  semble infinitésimal à l'échelle macroscopique ; il apparaît alors comme un point. Il contient approximativement  $10^{11}$  à  $10^{13}$  atomes. On ne peut alors pas distinguer les masses et le vide dans le volume  $dt$ . On suppose alors que la matière est un milieu continu. On parle, à l'échelle microscopique, d'approximation des milieux continus<sup>1</sup>.

En seconde année, on se place à l'échelle mésoscopique : un volume « infiniment petit » ou « élémentaire » est alors de dimension mésoscopique et on peut donc appliquer l'approximation des milieux continus à toutes les situations.

## A.2. Densité volumique de charges

Lorsqu'un élément de volume « élémentaire »<sup>2</sup>  $dt$  centré sur un point P contient une charge électrique élémentaire  $dq$ , on peut définir la densité volumique de charges  $\rho$  présente en un point P :

### Definition 1

La densité volumique de charges présente en un point P de l'espace est :

$$\rho(P) = \frac{dq}{dt},$$

où  $dq$  est la charge électrique élémentaire présente dans le volume élémentaire  $dt$  centré sur le point P.

L'unité SI de la densité volumique de charges  $\rho$  est le  $C \cdot m^{-3}$ , la charge  $dq$  s'exprimant en coulombs C et le volume  $dt$  en  $m^3$ .

Ainsi, la charge électrique comprise dans un volume  $\tau$  est égale à la somme des charges présentes en tous points P constituant le volume :

$$q = \iiint_{\tau} dq = \iiint_{\tau} \rho(P) dt.$$

1. L'approximation des milieux continus est valable *a fortiori* à l'échelle macroscopique.

2. Il est d'échelle mésoscopique et le volume semble être le point P à l'échelle macroscopique.

3. L'intégrale doit être considérée comme une addition d'une infinité d'éléments infiniment petits, et non comme une recherche de primitive.



1. On parle aussi de densité « superficielle ».
2. Par exemple, un bon conducteur ne peut être chargé que sur sa surface à l'échelle macroscopique.

3. Cette épaisseur est nulle à l'échelle macroscopique.
4.  $\Delta l$  est mésoscopique.

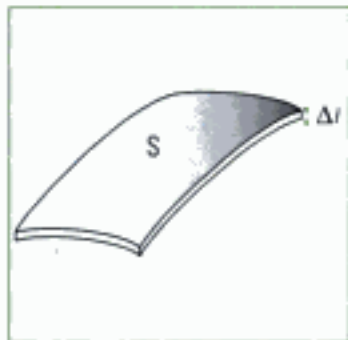


Fig. 1 - Surface S d'épaisseur  $\Delta l$ .

5. L'intégrale doit être considérée comme une addition d'une infinité d'éléments infiniment petits, et non comme une recherche de primitive.

6. C'est un milieu conducteur, dans lequel le déplacement des charges est possible.

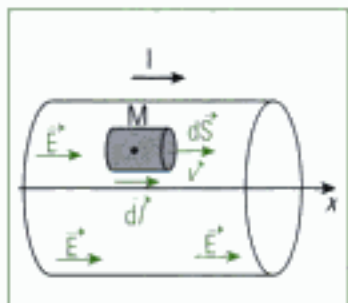


Fig. 2 - Volume élémentaire centré sur un point M.

7. Il s'agit d'une valeur moyenne dans ce modèle.

### A.3. Densité surfacique de charges<sup>1</sup>

Lorsqu'une charge se trouve, à l'échelle macroscopique, répartie sur une surface<sup>2</sup>, on parle de densité surfacique de charges électriques.

Comme les atomes ou molécules chargés occupent nécessairement un certain volume dans l'espace, il est donc inconcevable physiquement de pouvoir trouver des charges sur une surface. La densité surfacique est une modélisation mathématique. Une surface est considérée être une couche de grande étendue devant son épaisseur, laquelle pourra être considérée comme nulle<sup>3</sup>.

Si on note  $\Delta l$  l'épaisseur de cette couche<sup>4</sup>, dans laquelle existe une densité volumique de charges  $\rho$ , alors on peut définir une densité surfacique  $\sigma$  de charges à l'échelle macroscopique :

#### Définition 2

On dit qu'une charge électrique admet une **densité surfacique de charges**  $\sigma$  sur une surface S si l'épaisseur  $\Delta l$  de la couche chargée est très inférieure aux dimensions de la surface S (fig. 1). Avec  $\rho$  densité volumique de charges dans la couche  $\Delta l$ , on a alors :

$$\sigma = \int_0^{\Delta l} \rho dl,$$

où l'intégrale est faite sur l'épaisseur  $\Delta l$ , c'est-à-dire dans une direction orthogonale à la surface considérée.

L'unité de  $\sigma$  est le  $C \cdot m^{-2}$ , car son unité est celle de  $\rho$  multipliée par une longueur.

Ainsi, la charge électrique de la surface S est égale à la somme des charges  $\sigma(P)dS$  présentes en tous points P constituant la surface :

$$q = \iint_S dq = \iint_{P \in S} \sigma(P) dS,$$

où l'élément de surface  $dS$  est centré sur le point P.

### A.4. Densité de courant volumique

Le courant électrique correspond à un mouvement de charges électriques. On mesure à l'aide d'un ampèremètre l'intensité du courant électrique qui parcourt un fil.

Lorsque l'on se place à une échelle d'observation mésoscopique, le fil n'est plus infiniment fin et apparaît comme un solide<sup>6</sup>.

À l'échelle mésoscopique, la matière de ce milieu peut libérer  $n$  porteurs de charges par unité de volume. On note  $q$  la charge de chaque porteur mobile. On considère un volume élémentaire centré sur un point M. On choisit un cylindre droit de base  $dS$  et de génératrice  $dl$  colinéaire au courant électrique (fig. 2).

Le volume élémentaire  $d\tau = d\vec{S} \cdot d\vec{l}$  contient  $dN = n d\tau = n d\vec{S} \cdot d\vec{l}$  porteurs de charges libres  $q$ . La charge du volume  $d\tau$  est donc :

$$dq = q dN = n q d\tau = n q d\vec{S} \cdot d\vec{l}.$$

Les charges mobiles possédant la vitesse  $\vec{v}$  parcourent la hauteur  $dl$  du cylindre élémentaire pendant un intervalle de temps élémentaire  $dt$  tel que :  $d\vec{l} = \vec{v} dt$ .

1. On rappelle que l'intensité qui traverse une surface  $dS$  est la quantité de charges qui traversent cette surface par unité de temps.

2. Dans la définition du vecteur densité de courant, il s'agit de la densité des charges qui se déplacent, totalement différente de toute densité de charges fixes, par exemple celle des ions du réseau cristallin ou la densité de charges vue en électrostatique.

3. Si l'on parlait de densité volumique de courant, alors l'unité devrait être en  $A \cdot m^{-3}$ , ce qui n'est pas le cas. Mais comme le courant est bien réparti dans un volume, il est logique de parler de courant volumique, d'où le nom de « densité de courant volumique » pour  $\vec{j}$ .

4. Ce concept de densité de courant a déjà été introduit en première année dans le cours d'électrocinétique.

5. C'est alors une nappe de courant, que l'on peut par exemple obtenir lorsque du courant électrique parcourt une bande métallique de très faible épaisseur.

6. Cette épaisseur est nulle à l'échelle macroscopique.

7.  $\Delta l$  est mésoscopique.

Ainsi, l'intensité élémentaire  $di$  du courant électrique traversant l'élément de surface  $dS$  est donné par :

$$di = \frac{dq}{dt} = q \frac{dN}{dt} = nq \frac{d\tau}{dt} = nq d\vec{S} \cdot \frac{d\vec{l}}{dt} = nq \vec{v} \cdot d\vec{S}.$$

Pour obtenir l'intensité totale du courant électrique, il faut ajouter toutes les intensités élémentaires, c'est-à-dire intégrer  $di$  sur la section  $S$  du conducteur.

On définit alors le vecteur densité de courant :

$$\vec{j} = nq \vec{v} = \rho_m \vec{v},$$

expression dans laquelle  $\rho_m = nq$  désigne la densité volumique de charges mobiles possédant la vitesse  $\vec{v}$ .

Ainsi, on écrit et l'intensité totale s'écrit :

$$I = \int di = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}.$$

L'intensité totale qui traverse une section  $S$  de conducteur est donc égale au flux du vecteur densité de courant à travers cette section.

#### Définition 3

Le vecteur densité de courant  $\vec{j}$  est défini par

$$\vec{j} = nq \vec{v} = \rho_m \vec{v},$$

où  $\rho_m = nq$  est la densité volumique de charges des porteurs mobiles de vitesse  $\vec{v}$ .

L'intensité totale  $I$  qui traverse une section  $S$  de conducteur est obtenue en calculant le flux de  $\vec{j}$  à travers cette section :

$$I = \int di = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}.$$

L'intensité  $I$  s'exprimant en ampères  $A$  et la surface  $dS$  en  $m^2$ , l'unité du vecteur densité de courant<sup>3</sup> volumique  $\vec{j}$  est l' $A \cdot m^{-2}$ .

## A.5. Densité de courant surfacique

Lorsqu'un courant se trouve, à l'échelle macroscopique, étendu sur une surface<sup>5</sup>, on parle de densité de courant surfacique.

Comme les charges mobiles occupent nécessairement un certain volume dans l'espace, il est inconcevable physiquement de pouvoir trouver un courant sur une surface.

On en fait donc une modélisation mathématique en simulant une nappe de courant qui circulerait sur une surface  $S$  dont l'épaisseur serait négligeable devant la superficie de  $S$ .

Si on note  $\Delta l$  l'épaisseur de cette couche<sup>7</sup>, dans laquelle existe une densité volumique de charges mobiles  $\rho_m$ , alors on peut définir une densité de courant surfacique à l'échelle macroscopique :

#### Définition 4

On dit qu'un courant admet une densité surfacique  $\vec{j}_s$  de courant sur une surface  $S$  si l'épaisseur  $\Delta l$  de la couche où circulent les charges mobiles de densité volumique  $\rho_m$  est très inférieure aux dimensions de la surface  $S$ . La densité de courant surfacique est donnée par :

$$\vec{j}_s = \int_0^{\Delta l} \vec{j} dl,$$

où l'intégrale est faite sur l'épaisseur  $\Delta l$ , c'est-à-dire dans une direction orthogonale à la surface considérée.



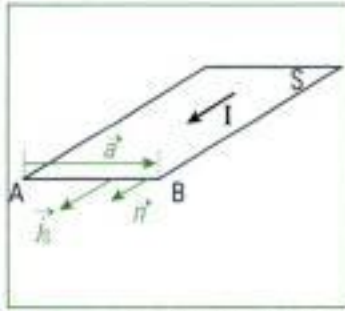


Fig. 3 - Flux du vecteur  $\vec{j}_s$  à travers la ligne [AB].

1. Une ligne peut être considéré comme la « section » d'une surface.
2. L'intégrale doit être considérée comme une addition d'une infinité d'éléments infiniment petits, et non comme une recherche de primitive.

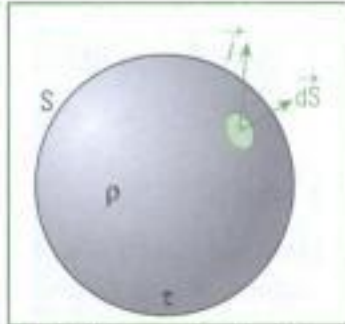


Fig. 4 - Volume  $\tau$  de surface  $S$ .

3. Ce résultat est abordé en mathématiques 2<sup>e</sup> année concernant les intégrales à paramètre. Il est valable pour des fonctions  $\rho$  suffisamment régulières, ce que nous supposons.
4. On a utilisé la formule d'Ostrogradsky, voir chapitre 1, §D.3.
5. En effet, la normale à toute surface fermée est sortante et le courant est compté positivement s'il sort de  $S$ .

6. Cette équation est analogue à l'équation locale de la conservation de la masse en mécanique des fluides, dont la démonstration est similaire.

L'unité de  $\vec{j}_s$  est le  $A \cdot m^{-1}$ , car son unité est celle de  $\vec{j}$  multipliée par une longueur.

Ainsi, le courant électrique qui parcourt une surface  $S$  est égal au flux du vecteur densité surfacique de courant à travers une ligne<sup>1</sup> (fig. 3). L'intensité passant à travers une ligne [AB] contenue dans la surface  $S$  s'écrit :

$$I = \int_A^B di = \int_A^B \vec{j}_s \cdot \vec{n} da,$$

où  $da$  est l'élément de longueur de la ligne [AB] et  $\vec{n}$  un vecteur unitaire tangent à la surface  $S$  et normal à la ligne en tout point.

## A.6. Équation locale de conservation de la charge

Considérons un volume  $\tau$  délimité par la surface  $S$ , dans lequel existe une densité volumique de charges  $\rho$ , non uniforme et variable dans le temps (fig. 4). Alors la charge totale  $Q(t)$  dans le volume  $\rho$  est égale à :

$$Q(t) = \iiint_{\tau} \rho(P, t) d\tau.$$

Entre les instants  $t$  et  $t + dt$ , la charge totale varie de  $dQ(t)$ . On a alors :

$$\frac{dQ(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \iiint_{\tau} \rho(P, t) d\tau = \iiint_{\tau} \frac{\partial \rho(P, t)}{\partial t} d\tau. \quad (1)$$

Intéressons nous maintenant à la charge qui a traversé, entre les instants  $t$  et  $t + dt$ , la surface entourant le volume  $\tau$ . Il s'agit des charges mobiles avec la densité de courant  $\vec{j}$ .

Un courant électrique  $I = \oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = \iiint_{\tau} \text{div } \vec{j} d\tau$  est sorti de  $S$ . Par conséquent, l'intensité reçue par le volume  $\tau$  est égale à :

$$I_{\text{reçue}} = \frac{dQ(t)}{dt} = - \iiint_{\tau} \text{div } \vec{j} d\tau. \quad (2)$$

Il reste à écrire la conservation de la charge, d'après les équations (1) et (2) :

$$\iiint_{\tau} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau = - \iiint_{\tau} \text{div } \vec{j} d\tau, \text{ ou :}$$

$$\iiint_{\tau} \left( \text{div } \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) d\tau = 0.$$

Comme la démonstration reste valable pour tout volume  $\tau$ , on en déduit :

### Propriété 1

#### Équation locale de conservation de la charge

$$\text{div } \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$$

Cette relation est valable en chaque point de l'espace<sup>6</sup>.

Chaque terme peut être interprété physiquement, au vu de la démarche concrète qui a été conduite dans le calcul.

Le terme  $\text{div } \vec{j}$  représente le flux des charges à la surface, alors que le terme  $\frac{\partial \rho}{\partial t}$  représente l'augmentation de la charge présente en un point. L'équation traduit alors le fait que la variation de charge en un point est due au seul fait qu'il y a eu déplacement, c'est-à-dire entrée ou sortie, de charges. Il n'y a donc pas de création de charges.



1. James Clerk Maxwell (1831-1879) trouva en 1865 la cohérence qui n'existait pas encore entre toutes les lois de l'électromagnétisme en posant les équations qui portent son nom. La vérification de sa théorie sera apportée par Hertz en 1888.

2. En filière MP, l'étude de l'électromagnétisme des milieux matériels n'est pas au programme.

3. On peut donc dire que cette force vient des densités de charges et de courant qui ont créé le champ.

4. On pourra donc interpréter cela par le fait qu'un champ peut être source de l'autre.

5. Ces équations seront valables dans le vide et dans certains métaux et gaz sous certaines conditions, conformément au programme de la filière MP.

6. Ce n'est pas le cas dans le cadre de la mécanique du point matériel, car les coordonnées du point étudié dépendent du temps : les variables d'espace et de temps sont alors liées.

## B. Les équations de Maxwell<sup>1</sup>

Dans tout l'ouvrage, l'étude sera faite dans des milieux non magnétiques, c'est-à-dire de perméabilité magnétique égale à celle du vide  $\mu_0$ <sup>2</sup>, et non diélectriques, c'est-à-dire de permittivité égale à celle du vide  $\epsilon_0$ .

### B.1. Le champ électromagnétique

En tout point M de l'espace, le champ électromagnétique ( $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$ ) est créé par la réunion sur l'ensemble des points P de l'espace des densité volumique de charges  $\rho(P)$  et densité de courant volumique  $\vec{j}(P)$ .

Une particule de charge  $q$  passant en ce point M subit de la part des champs<sup>3</sup> la force de Lorentz, vue en première année :

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}).$$

Les équations de Maxwell régissent le champ électromagnétique créé par ces distributions en tout point de l'espace.

La connaissance de ces distributions rend donc possible la détermination des deux composantes  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  du champ électromagnétique, via l'utilisation des équations de Maxwell.

Ces équations sont locales et relient chaque champ à ses causes, mais aussi les champs entre eux<sup>4</sup>.

### B.2. Équations de Maxwell dans le vide

En l'absence de matière autre que les charges et courants qui constituent les sources du champ électromagnétique, les quatre équations de Maxwell s'écrivent :

#### Propriété 2

$$\text{div} \vec{B} = 0$$

équation de Maxwell-flux

$$\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

équation de Maxwell-Gauss

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

équation de Maxwell-Faraday

$$\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

équation de Maxwell-Ampère

Ce sont des équations locales, valables en tout point ne possédant pas de propriété matérielle particulière<sup>5</sup>.

On constate la présence de dérivées spatiales (opérateurs divergence ou rotationnel) et temporelle. On peut se placer en un point fixe et étudier les variations du champ électromagnétique dans le temps, ou bien prendre « une photo instantanée » de l'état du champ électromagnétique à une date fixée pour étudier ses variations en fonction des coordonnées d'espace. Les variables d'espace et de temps sont donc ici indépendantes<sup>6</sup>, et on pourra intervertir l'ordre d'intégrations ou de dérivations lorsqu'elles concernent des variables indépendantes.

L'interprétation physique de ces équations permet de comprendre quelles sont les causes (membre de droite) de l'existence d'un champ (membre de gauche).

- L'équation de **Maxwell-flux** indique simplement que le champ magnétique  $\vec{B}$  est à flux conservatif.
- Avec l'équation de **Maxwell-Gauss**, on constate que les charges électriques fixes (densité volumique  $\rho$ ) sont source du champ électrique  $\vec{E}$ .
- Avec celle de **Maxwell-Faraday**, on voit que les variations temporelles du champ magnétique  $\vec{B}$  sont nécessairement liées à la présence d'un champ électrique  $\vec{E}$ .
- On retrouve le lien entre le champ magnétique et ses sources dans l'équation de **Maxwell-Ampère** : la présence du champ magnétique  $\vec{B}$  est due à l'existence de courants électriques (densité  $\vec{j}$ ) et à la dépendance au temps du champ électrique  $\vec{E}$ .

1. En régime variable, on les dit couplés car ils ne peuvent généralement pas exister l'un sans l'autre.

Plus généralement, on constate que lorsque les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  dépendent du temps, ils sont présents ensemble dans deux des équations de Maxwell<sup>1</sup>.

L'équation de **Maxwell-Ampère** peut être réécrite de la manière suivante :

$$\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \left( \vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = \mu_0 (\vec{j} + \vec{j}_D), \text{ avec } \vec{j}_D = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

#### Définition 5

On appelle **densité de courant volumique de déplacement** la quantité :

$$\vec{j}_D = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

$\vec{j}_D$  est homogène à une densité de courant volumique ( $\text{A} \cdot \text{m}^{-2}$ ).

Les variations temporelles du champ électrique  $\vec{E}$  sont donc source de champ magnétique, au même titre que les courants « vrais ».

### B.3. Équation de conservation de la charge

On propose une démonstration plus formelle de cette équation à partir des équations de Maxwell. L'avantage est une obtention rapide du résultat et l'inconvénient une interprétation physique rendue plus difficile.

On rappelle l'équation de Maxwell-Ampère :

$$\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

Appliquons la divergence à chaque membre de cette égalité :

$$\text{div} \vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \text{div} \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \text{div} \left( \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = \mu_0 \left[ \text{div} \vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial (\text{div} \vec{E})}{\partial t} \right].$$

Or  $\text{div}(\vec{\text{rot}} \vec{B}) = 0$ <sup>2</sup> et  $\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$  (Maxwell-Gauss), il vient alors :

$$0 = \text{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

On a ainsi retrouvé l'équation de conservation de la charge.

## C. Formulation intégrale des équations de Maxwell<sup>4</sup>

Comme les équations de Maxwell sont locales et valables en tout point et à tout instant, elles peuvent être intégrées sur un volume ou une surface<sup>5</sup>.

L'intégration doit être considérée physiquement, c'est-à-dire comme une addition d'une infinité de contributions, chacune étant infiniment petite.

2. On a vu que l'ordre des dérivations par rapport à des variables indépendantes peut être interverti.

3.  $\text{div}(\vec{\text{rot}} \vec{B}) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{B})$ , le produit scalaire de  $\vec{\nabla}$  avec un vecteur qui lui est orthogonal est nul (cf chapitre 1).

4. On s'apercevra dans cette partie que le nom de chacune des équations de Maxwell est le même que celui de la propriété ou du théorème qui lui est associé.

5. On cherchera à faire apparaître les formules de Stokes ou d'Ostrogradsky. On intégrera donc la divergence sur un volume et on calculera le flux du rotationnel à travers une surface ouverte.



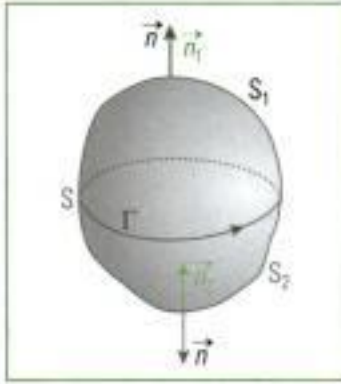


Fig. 5 - Surface  $S_1$  et  $S_2$  s'appuyant sur le même contour  $\Gamma$ .

## C.1. Conservation du flux magnétique

L'équation de Maxwell-flux ( $\text{div} \vec{B} = 0$ ) est valable pour tous les régimes et pour tous les milieux. Le résultat sera donc tout à fait général.

Soient deux surfaces distinctes  $S_1$  et  $S_2$  s'appuyant sur un même contour  $\Gamma$  et  $S$  la surface fermée réunion des deux surfaces  $S_1$  et  $S_2$ , délimitant ainsi un volume  $\tau$  (fig. 5).

On oriente le contour  $\Gamma$ , les normales  $\vec{n}_1$  et  $\vec{n}_2$  des deux surfaces  $S_1$  et  $S_2$  conformément à la règle du tire bouchon et la normale sortante  $\vec{n}$  de  $S$ .

Les flux  $\phi_1$  et  $\phi_2$  du champ magnétique  $\vec{B}$  à travers la surface  $S_1$  et  $S_2$  respectivement valent :

$$\phi_1 = \iint_{S_1} \vec{B} \cdot \vec{n}_1 \, dS \quad \text{et} \quad \phi_2 = \iint_{S_2} \vec{B} \cdot \vec{n}_2 \, dS.$$

Calculons la différence de ces deux flux :

$$\phi_1 - \phi_2 = \iint_{S_1} \vec{B} \cdot \vec{n}_1 \, dS - \iint_{S_2} \vec{B} \cdot \vec{n}_2 \, dS.$$

Or  $\vec{n}_1 = \vec{n}$  sur  $S_1$  et  $\vec{n}_2 = -\vec{n}$  sur  $S_2$ . On obtient donc :

$$\phi_1 - \phi_2 = \iint_{S_1} \vec{B} \cdot \vec{n} \, dS + \iint_{S_2} \vec{B} \cdot \vec{n} \, dS = \iint_S \vec{B} \cdot \vec{n} \, dS.$$

On applique maintenant la formule d'Ostrogradsky :

$$\phi_1 - \phi_2 = \iint_S \vec{B} \cdot \vec{n} \, dS = \iiint_{\tau} \text{div} \vec{B} \, d\tau = 0,$$

car  $\text{div} \vec{B} = 0$  en tout point de  $\tau$ .

### Propriété 3

Le flux magnétique à travers une surface fermée  $S$  est nul (fig. 6) :

$$\iint_S \vec{B} \cdot \vec{n} \, dS = 0.$$

On dit que le **champ magnétique  $\vec{B}$  est à flux conservatif**. Le flux magnétique à travers une surface non fermée ne dépend que du contour  $\Gamma$  sur lequel s'appuie cette surface, sans dépendre de la surface elle-même.

C'est l'interprétation au niveau macroscopique de l'équation locale de Maxwell-Flux.



Fig. 6 - Surface fermée  $S$  de normale sortante  $\vec{n}$ .

2. C'est pour cela que l'on fait un abus de langage en parlant de « flux magnétique à travers un contour ».

3. L'étude de l'électrostatique dans les diélectriques est hors programme.

## C.2. Théorème de Gauss

L'équation locale de Maxwell-Gauss ( $\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ ) est identique en régime variable ou en statique. Le théorème de Gauss qui en découle a donc un caractère universel. Mais en présence de matière diélectrique, il faut le réécrire avec le déplacement électrique<sup>3</sup>. On le démontre ici dans le vide, en calculant le flux du champ électrique à travers une surface fermée  $S$  quelconque. Cette surface délimite un volume  $\tau$ .

En utilisant la formule d'Ostrogradsky, on a :

$$\iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iiint_{\tau} \text{div} \vec{E} \, d\tau,$$

et avec l'équation de Maxwell-Gauss  $\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ , il vient :





Fig. 7 - Surface fermée S contenant une charge totale  $q_{int}$ .

### Théorème 1

#### Théorème de Gauss

Pour toute surface fermée S délimitant un volume  $\tau$  (fig. 7), le champ électrique  $\vec{E}$  vérifie dans le vide :

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iiint_{\tau} \text{div} \vec{E} \, d\tau = \iiint_{\tau} \frac{\rho}{\epsilon_0} \, d\tau = \frac{q_{int}}{\epsilon_0},$$

avec  $q_{int}$  la charge contenue dans le volume  $\tau$ .

L'équation de Maxwell-Gauss est l'expression locale de ce théorème.

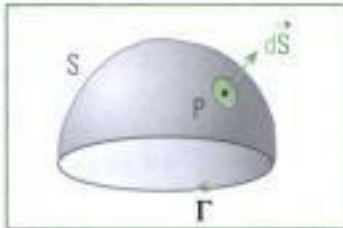


Fig. 8 - Surface ouverte S.

### C.3. Loi de Faraday

L'équation de Maxwell-Faraday ( $\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ ) est valable pour tous les régimes et pour tous les milieux. Le résultat sera donc tout à fait général.

Considérons un contour  $\Gamma$  sur lequel s'appuie une surface S (fig. 8). On calcule la circulation du champ électrique le long du contour  $\Gamma$  :

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = e.$$

1. Pour se convaincre que  $e$  a bien la dimension d'une différence de potentiel, on peut se remémorer la formule infinitésimale donnant la différentielle du potentiel  $V$  en électrostatique :  $\vec{E} \cdot d\vec{l} = -dV$ .

$e$  est appelé la force électromotrice (f.e.m.) d'induction et correspond à la différence de potentiel<sup>1</sup> qui apparaît dans le contour. Appliquons la formule de Stokes, puis servons-nous de l'équation de Maxwell-Faraday :

$$e = \oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \iint_S \text{rot} \vec{E} \cdot d\vec{S} = - \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = - \frac{\partial}{\partial t} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = - \frac{d\phi}{dt},$$

expression dans laquelle  $\phi$  désigne le flux magnétique à travers S.

### Loi 1

#### Loi de Faraday

$$e = - \frac{d\phi}{dt},$$

où  $e$  désigne la force électromotrice d'induction traversant un circuit fermé  $\Gamma$  et  $\phi$  le flux magnétique à travers ce même circuit  $\Gamma$ .

2. On peut remarquer que la loi de Faraday est respectée en électrostatique car on a :

$$e = \oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \oint_{\Gamma} -\text{grad} V \cdot d\vec{l} \\ = \oint_{\Gamma} -dV = 0$$

(car  $\Gamma$  est fermé) et  $\frac{d\phi}{dt} = 0$  (car on est en régime permanent).

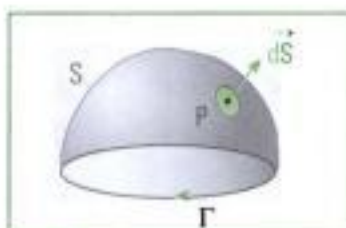


Fig. 9 - Surface ouverte S.

### C.4. Théorème d'Ampère généralisé

On calcule le flux de chacun des membres de l'équation de Maxwell-Ampère ( $\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ ) à travers une surface S non fermée s'appuyant sur un contour  $\Gamma$  (fig. 9).

Comme nous utilisons l'équation dans le vide pour un régime quelconque, le résultat n'est *a priori* valable que dans le vide.

1. Dans le vide on a :

$$\vec{j}_0 = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

2. Une telle intensité peut être positive ou négative suivant l'orientation de la normale de S.

3. On rappelle que le courant de déplacement est un courant fictif qui traduit une équivalence avec les variations temporelles du champ électrique.

4. En régime statique (indépendant du temps),  $I_D = 0$  et on retrouve l'expression du théorème d'Ampère vue en première année.

5. L'opérateur  $\vec{\nabla}$  a été défini au chapitre 1 §6.

6. On effectue le produit vectoriel de deux vecteurs colinéaires.

L'intégration sur la surface S de l'égalité fournit :

$$\iint_S \vec{\text{rot}} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iint_S \left( \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S} = \mu_0 \left( \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} + \iint_S \vec{j}_D \cdot d\vec{S} \right).$$

Pour le membre de gauche, on applique la formule de Stokes :

$$\iint_S \vec{\text{rot}} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l}.$$

Dans le membre de droite, on reconnaît l'expression de l'intensité du courant qui traverse la surface S dans le sens choisi pour sa normale<sup>2</sup> :

$$\iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = I \quad \text{et} \quad \iint_S \vec{j}_D \cdot d\vec{S} = I_D,$$

où I est l'intensité du courant « vrai » et  $I_D$  celle du courant de déplacement<sup>3</sup>.

Il vient donc, compte tenu de ces résultats intermédiaires :

#### Théorème 2

#### Théorème d'Ampère généralisé

Le flux du champ magnétique  $\vec{B}$  à travers un contour fermé  $\Gamma$  est égal à la somme des intensités traversant  $\Gamma$  :

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = I + I_D,$$

où I est l'intensité du courant « vrai » et  $I_D$  celle du courant de déplacement à travers le contour fermé  $\Gamma$ .

Ce théorème montre que les sources du champ magnétique  $\vec{B}$  sont les courants électriques « vrais » et ceux de déplacement, ces derniers résultant des variations temporelles du champ électrique<sup>4</sup>.

## D. Étude des potentiels

### D.1. Potentiel vecteur

L'équation de Maxwell-flux s'écrit  $\vec{\text{div}} \vec{B} = 0$ , soit avec la notation nabla<sup>5</sup> :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0.$$

On en déduit que le champ magnétique  $\vec{B}$  reste orthogonal au vecteur nabla  $\vec{\nabla}$  en tout point. D'après la propriété 8 du premier chapitre, il existe un champ de vecteurs  $\vec{A}$  tel que  $\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$  en tout point, soit  $\vec{B} = \vec{\text{rot}} \vec{A}$ .

#### Propriété 4

Le champ magnétique  $\vec{B}$  dérive d'un **potentiel vecteur**  $\vec{A}$  tel que :

$$\vec{B} = \vec{\text{rot}} \vec{A}.$$

Le potentiel vecteur n'est pas unique.

En effet, considérons le vecteur  $\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\text{grad}} U$ ,  $\vec{A}$  étant le potentiel vecteur du champ  $\vec{B}$  et U un champ de scalaires quelconque.

Calculons le rotationnel de ce vecteur :

$$\vec{\text{rot}} \vec{A}' = \vec{\text{rot}} \vec{A} + \vec{\text{rot}}(\vec{\text{grad}} U) = \vec{\text{rot}} \vec{A}, \quad \text{car} \quad \vec{\text{rot}}(\vec{\text{grad}} U) = \vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} U = \vec{0}.$$

Donc  $\vec{\text{rot}} \vec{A}' = \vec{\text{rot}} \vec{A} = \vec{B}$  et  $\vec{A}'$  est aussi un potentiel vecteur du champ  $\vec{B}$ .



## D.2. Potentiel scalaire

Réécrivons maintenant l'équation de Maxwell-Faraday en tenant compte du potentiel vecteur  $\vec{A}$  du champ magnétique  $\vec{B}$  :

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\text{rot}} \vec{A}),$$

$$\text{soit } \vec{\text{rot}} \left( \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = \vec{0}, \text{ ou } \vec{\nabla} \wedge \left( \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = \vec{0}.$$

On en déduit que le vecteur  $\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$  reste colinéaire au vecteur nabla  $\vec{\nabla}$  en tout point. D'après la propriété 7 du premier chapitre, il existe un champ de scalaires  $V$  tel que  $\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\vec{\text{grad}} V$  en tout point, soit :

$$\vec{E} = -\vec{\text{grad}} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}.$$

### Propriété 5

Le champ électrique  $\vec{E}$  dérive d'un **potentiel scalaire**  $V$  tel que :

$$\vec{E} = -\vec{\text{grad}} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}.$$

Le potentiel scalaire  $V$  n'est pas unique.

En effet, considérons la nouvelle fonction scalaire  $V' = V + f(t) + K$ , où  $f$  est une fonction du temps seulement et  $K$  une constante. Calculons le gradient de cette nouvelle fonction  $V'$  :

$$\vec{\text{grad}} V' = \vec{\text{grad}} V + \vec{\text{grad}} f + \vec{\text{grad}} K = \vec{\text{grad}} V,$$

car la dérivée de la fonction  $f$  par rapport aux variables d'espace est nulle, tout comme celle de la constante  $K$ . Si  $V$  est un potentiel scalaire, alors  $V'$  l'est aussi : le potentiel scalaire n'est pas unique.

L'unicité du couple  $(\vec{A}, V)$  est réalisée si l'on impose une équation supplémentaire entre  $\vec{A}$  et  $V$  : c'est la **condition de Jauge**. On travaillera alors avec la **Jauge dite de Lorentz** :

1. L'étude des conditions de Jauge est hors programme.

$$\text{div} \vec{A} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial V}{\partial t} = 0^1.$$

## E. Relations de passage du champ électromagnétique

2. On a vu en première année la difficulté pour écrire les champs sur une surface chargée ou parcourue par un courant.

Dans les équations de Maxwell n'apparaissent que des densités de charges ou de courants réparties dans un volume. Lorsque le modèle des sources du champ impose que ces charges ou courants ne soient présents que sur des surfaces, on ne peut plus appliquer les équations de Maxwell<sup>2</sup>.

Les champs subissent alors des discontinuités à leur traversée. Ils ne sont donc plus dérivables et les équations de Maxwell doivent être remplacées par des relations dites « de passage » qui expriment la discontinuité du champ



1. On exclut donc de l'étude, conformément au programme, les milieux diélectriques.

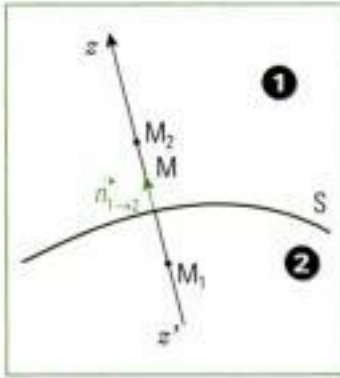


Fig. 10 - Les deux demi-espaces 1 et 2 séparés par la surface S.

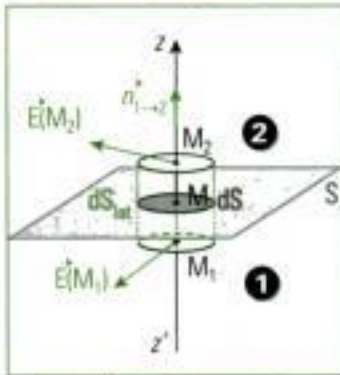


Fig. 11 - Élément de volume autour du point  $M \in S$ .

2. La sommation ne contient que trois termes, chacun étant un infiniment petit.
3. Le champ électrique ne peut jamais être infini car ceci signifierait une force de Coulomb infinie (voir 1<sup>re</sup> année).

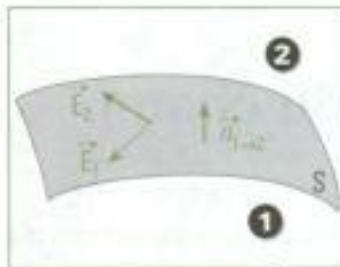


Fig. 12 - Discontinuité de  $\vec{E}_n$  à la traversée d'une surface chargée.

$$4. \vec{E}_1(M) = \lim_{M_1 \rightarrow M} \vec{E}_1(M_1) \\ \text{et } \vec{E}_2(M) = \lim_{M_2 \rightarrow M} \vec{E}_2(M_2).$$

électromagnétique à la traversée d'une surface chargée avec une densité superficielle  $\sigma$  ou parcourue par un courant de densité  $\vec{j}_s$ .

On se limitera, dans cette étude, au vide ou aux milieux qui possèdent les mêmes constantes matérielles  $\epsilon_0$  et  $\mu_0$  que le vide<sup>1</sup>.

On considère une surface  $S$  séparant deux demi-espaces 1 et 2 qui peut être chargée ou parcourue par un courant (fig. 10). On s'intéresse à un point  $M$  de cette surface, et aux deux points  $M_1$  et  $M_2$  de part et d'autre de la surface, proches de  $M$  et disposés sur la normale  $z'z$  à la surface en  $M$  orientée de  $M_1$  vers  $M_2$ . On appelle  $\vec{n}_{1 \rightarrow 2}$  le vecteur unitaire porté par la droite  $z'z$  et de même sens. L'objectif est de faire tendre  $M_1$  et  $M_2$  vers  $M$  pour les assimiler au point  $M$  : on met alors en évidence la discontinuité du champ lors de la traversée de la surface au point  $M$ .

Les indices N et T désigneront respectivement la composante normale et une composante tangentielle quelconque d'un vecteur à la surface.

## E.1. Champ électrique

### E.1.1. Composante normale

On imagine un élément de surface  $dS$  de la surface  $S$ , et on construit une surface fermée  $\Sigma$  cylindrique de génératrice  $z'z$  et de base  $dS$  centrée sur  $M$ .  $M_1$  et  $M_2$  sont les centres des bases du cylindre  $\Sigma$  (fig. 11).

On va utiliser la formulation intégrale de l'équation de Maxwell-Gauss. Tout d'abord, on calcule le flux du champ électrique à travers la surface fermée  $\Sigma$  considérée :

$$\phi = \oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \vec{E}(M_1) \cdot (-\vec{n}_{1 \rightarrow 2} dS) + \vec{E}(M_2) \cdot (\vec{n}_{1 \rightarrow 2} dS) + \iint_{dS_{lat}} \vec{E} \cdot d\vec{S}_{lat}.$$

Lorsque l'on fait tendre la hauteur du cylindre vers 0 ( $M_1 \rightarrow M$  et  $M_2 \rightarrow M$ ), la surface latérale du cylindre  $dS_{lat}$  tend vers 0 et, comme  $\|\vec{E}\|$  reste fini<sup>3</sup>, l'intégrale  $\iint_{dS_{lat}} \vec{E} \cdot d\vec{S}_{lat}$  tend vers 0.

Le flux devient donc :

$$\phi = [\vec{E}(M_2) - \vec{E}(M_1)] \cdot \vec{n}_{1 \rightarrow 2} dS.$$

En vertu du théorème de Gauss, ce flux vaut :

$$\phi = \frac{q_{int}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma dS}{\epsilon_0},$$

et on obtient finalement, au voisinage immédiat du point  $M$  :

#### Propriété 6

Discontinuité de la composante normale du champ électrique (fig. 12)

$$[\vec{E}_2 - \vec{E}_1] \cdot \vec{n}_{1 \rightarrow 2} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}, \text{ ou bien}$$

$$\vec{E}_{2N} - \vec{E}_{1N} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}_{1 \rightarrow 2}.$$

C'est donc la condition de passage pour la composante normale du champ électrique lors de la traversée d'une surface chargée. La composante normale du champ électrique subit alors une discontinuité.

1. Les cotés sont alors tangentiels à la surface S.

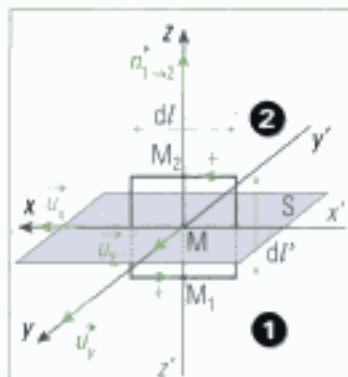


Fig. 13 - Éléments de surface autour du point  $M \in S$ .

2. La circulation le long des deux cotés perpendiculaires à la surface S est nulle, puisque ceux-ci ont une longueur qui s'annule,  $\|\vec{E}\|$  restant fini.

3. On admet que  $\left\| \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right\|$  reste fini.

## E.1.2. Composante tangentielle

On imagine dorénavant un contour  $\Gamma$  élémentaire rectangulaire autour du point M, dont les cotés sont soit parallèles à la normale  $\vec{n}_{1 \rightarrow 2}$  à la surface S, soit perpendiculaires<sup>1</sup> à cette normale, et ont pour dimensions respectives  $dl'$  et  $dl$  (fig. 13). Ce contour  $\Gamma$  délimite une surface  $\Sigma'$  entourant le point M.

On appelle  $\vec{u}_x$  le vecteur unitaire dirigé dans la direction  $x'x$  des cotés tangentiels à la surface S.

On va utiliser la formulation intégrale de l'équation de Maxwell-Faraday. On calcule alors la circulation C du champ électrique le long de ce contour  $\Gamma$ , en faisant tendre  $dl'$  vers zéro :

$$C = \oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \vec{E}(M_1) \cdot (-\vec{u}_x dl) + \vec{E}(M_2) \cdot (\vec{u}_x dl)^2.$$

D'après l'équation de Maxwell-Faraday, on a aussi:

$$C = \oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \iint_{\Sigma'} \text{rot} \vec{E} \cdot d\vec{\Sigma}' = - \iint_{\Sigma'} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{\Sigma}' = 0,$$

car la surface  $\Sigma'$  du contour devient nulle lorsque la dimension de l'un de ses cotés devient nulle<sup>1</sup>.

Finalement, avec les mêmes notations que précédemment, on obtient  $(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \cdot \vec{u}_x = 0$ . Comme ce raisonnement est valable pour tout vecteur  $\vec{u}_x$  tangent à la surface S, on obtient la propriété suivante :

### Propriété 7

**Conservation de la composante tangentielle du champ électrique**

$$[\vec{E}_2 - \vec{E}_1] \wedge \vec{n}_{1 \rightarrow 2} = \vec{0}, \text{ ou } \vec{E}_{T1} = \vec{E}_{T2}.$$

On parle de conservation de la composante tangentielle du champ électrique à la traversée de toute surface, chargée ou non.

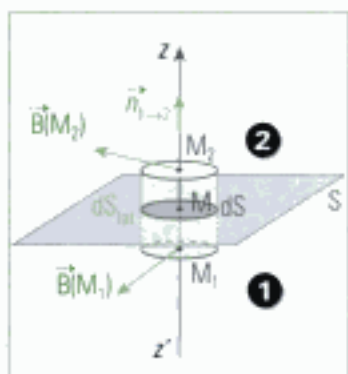


Fig. 14 - Éléments de volume autour du point  $M \in S$ .

4. On sait que le flux du champ magnétique à travers toute surface fermée est nul (cf C.1).

5. Le champ magnétique ne peut jamais être infini car ceci signifierait une force de Laplace infinie (voir 1<sup>re</sup> année).

## E.2. Champ magnétique

### E.2.1. Composante normale

On reprend la surface  $\Sigma$  fermée imaginée dans le paragraphe G.1.1 (fig. 14), à travers laquelle on calcule le flux du champ magnétique.

$$\phi = \oint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \vec{B}(M_1) \cdot (-\vec{n}_{1 \rightarrow 2} dS) + \vec{B}(M_2) \cdot (\vec{n}_{1 \rightarrow 2} dS) + \iint_{dS_{\text{lat}}} \vec{B} \cdot d\vec{S}_{\text{lat}} = 0^4.$$

Lorsque l'on fait tendre la hauteur du cylindre vers 0 ( $M_1 \rightarrow M$  et  $M_2 \rightarrow M$ ), la surface latérale  $dS_{\text{lat}}$  du cylindre tend vers 0 et, comme  $\|\vec{B}\|$  reste fini<sup>5</sup>, l'intégrale  $\iint_{dS_{\text{lat}}} \vec{B} \cdot d\vec{S}_{\text{lat}}$  tend vers 0.

On obtient finalement, au voisinage immédiat du point M, la propriété suivante :

### Propriété 8

**Conservation de la composante normale du champ magnétique**

$$[\vec{B}_2 - \vec{B}_1] \cdot \vec{n}_{1 \rightarrow 2} = 0, \text{ ou bien } \vec{B}_{N1} = \vec{B}_{N2}.$$







### E.3. Conclusion

En première année, on a vu qu'il était difficile de définir chacun des champs électrique et magnétique sur une surface chargée ou parcourue par des courants de surface. La discontinuité du champ avait été expliquée qualitativement.

L'étude précédente exprime cette discontinuité de manière quantitative. Lors de la traversée d'une surface, les équations donnant les conditions de passage du champ électromagnétique remplacent les équations de Maxwell qui ne sont plus définies sur la surface<sup>1</sup>.

Les conditions de passage sont donc des équations locales « de surface ».

La propriété 10 synthétise les relations de passage :

#### Propriété 10

**Discontinuité du champ électromagnétique ( $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$ ) lors de la traversée d'une surface de caractéristiques  $(\sigma, \vec{j}_s)$**

$$\begin{cases} \vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}_{1 \rightarrow 2} \\ \vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n}_{1 \rightarrow 2} \end{cases}$$

1. Le champ électromagnétique admettant une discontinuité, les dérivées spatiales du champ ne sont dès lors plus définies.

1. Lorsque des charges ou courants seront présents, les constantes de la matière resteront celles du vide : permittivité absolue  $\epsilon_0$  et perméabilité absolue  $\mu_0$ .

## F. Généralités sur la statique

On va s'intéresser dans cette partie aux régimes stationnaires, c'est-à-dire indépendants du temps. Les sources et champs associés ne dépendent pas de la variable « temps  $t$  ».

Pour cette étude, on se placera dans le vide<sup>1</sup>.

### F.1. Équations de Maxwell

On reprend les équations de Maxwell dans le vide, en annulant les dérivées par rapport au temps :

Équation de Maxwell-flux :  $\text{div} \vec{B} = 0$ ,

Équation de Maxwell-Gauss :  $\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ ,

Équation de Maxwell-Faraday :  $\vec{\text{rot}} \vec{E} = 0$ ,

Équation de Maxwell-Ampère :  $\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ .

Les champs sont maintenant découplés. Le champ électrique  $\vec{E}$  apparaît seul dans les équations de Maxwell-Gauss et Maxwell-Faraday, tandis que le champ magnétique  $\vec{B}$  ne figure que dans les équations de Maxwell-Flux et Maxwell-Ampère.

L'étude de l'électrostatique et celle de la magnéto-statique sont donc indépendantes et chacun des deux champs peut exister en l'absence de l'autre.

## F.2. Équations de Poisson

Ce sont les équations aux dérivées partielles satisfaites par chacun des potentiels. En régime stationnaire, les potentiels sont définis par :

$$\vec{B} = \text{rot} \vec{A} \quad \text{et} \quad \vec{E} = -\text{grad} V.$$

L'équation de Maxwell-Faraday conduit à  $\vec{E} = -\text{grad} V$ , et en introduisant cette expression dans l'équation de Maxwell-Gauss, il vient :

$$\text{div}(-\text{grad} V) = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \text{ soit :}$$

### Propriété 11

#### Équation de Poisson du potentiel électrique

En tout point, le potentiel électrique  $V$  vérifie :

$$\Delta V + \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0.$$

1. C'est l'équation qui relie le potentiel électrostatique à ses sources.

2. Ce n'est pas parce qu'il n'y a pas de charge en un point que le potentiel y est nul. Les charges qui le créent peuvent se trouver ailleurs.

En un point où il n'y a pas de charges<sup>2</sup>, on a :

$$\Delta V = 0 \text{ (équation de Laplace).}$$

De manière analogue, l'équation de Maxwell-Flux amène  $\vec{B} = \text{rot} \vec{A}$ .

L'équation de Maxwell-Ampère s'écrit alors :

$$\text{rot} \text{rot} \vec{A} = \mu_0 \vec{j}, \text{ soit : } \text{grad} \text{div} \vec{A} - \Delta \vec{A} = \mu_0 \vec{j}.$$

La condition de Jauge s'écrivant en statique  $\text{div} \vec{A} = 0$ , on obtient :

### Propriété 12

#### Équation de Poisson du potentiel vecteur

En tout point, le potentiel vecteur  $\vec{A}$  vérifie :

$$\Delta \vec{A} + \mu_0 \vec{j} = \vec{0}.$$

3. En considérant les coordonnées cartésiennes, chacune de ses composantes satisfait la même équation de Poisson que le potentiel scalaire. Voir pour cela l'écriture du laplacien dans le chapitre 1.

## F.3. Solution des équations de Poisson

La résolution de l'équation de Poisson est mathématiquement compliquée. On admet le résultat suivant :

### Propriété 13

Le potentiel  $V(M)$  solution de l'équation locale  $\Delta V(M) + \frac{\rho(M)}{\epsilon_0} = 0$  s'écrit en fonction de ses sources se trouvant aux points  $P$  d'un volume  $\tau$  (fig. 16) :

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\tau} \frac{\rho(P)}{PM} d\tau.$$

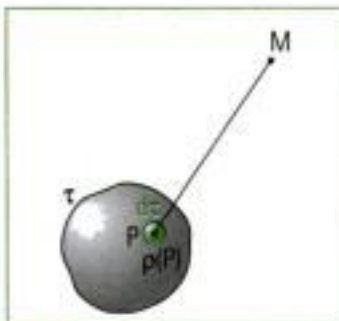


Fig. 16 - Sources du potentiel en M.

4. On retrouve l'expression du potentiel vue en première année, mais obtenue à partir des équations de Maxwell.

De manière analogue, les composantes selon les directions  $Ox$ ,  $Oy$  et  $Oz$  du potentiel vecteur  $\vec{A}$  vérifient les équations de Poisson :

$$\Delta A_x + \mu_0 j_x = 0, \Delta A_y + \mu_0 j_y = 0, \Delta A_z + \mu_0 j_z = 0.$$



1. Il suffit de remplacer  $\frac{1}{\epsilon_0}$  par  $\mu_0$  pour avoir la même équation.

Les solutions s'écrivent de manière analogue<sup>1</sup> :

$$A_x(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{P \in \tau} \frac{j_x(P)}{PM} d\tau, A_y(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{P \in \tau} \frac{j_y(P)}{PM} d\tau,$$

et  $A_z(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{P \in \tau} \frac{j_z(P)}{PM} d\tau$ , soit une expression globale :

#### Loi 2

##### Loi de Biot et Savart pour le potentiel vecteur

Le potentiel vecteur  $\vec{A}$  créé en un point M par une distribution de courant volumique se trouvant aux points P d'un volume  $\tau$  s'écrit :

$$\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{P \in \tau} \frac{\vec{j}(P)}{PM} d\tau.$$

On constate que si les courants gardent une direction fixe ( $\vec{j}$  est dirigé par le même vecteur unitaire pour tous les points P de l'espace), alors le potentiel vecteur  $\vec{A}$  possède cette direction : il est colinéaire à ses sources<sup>2</sup>.

2. Ce résultat peut être généralisé. Lorsque les courants sont tournants (en utilisant par exemple les coordonnées cylindriques), on constate que le potentiel vecteur a des lignes de champ tournantes aussi.

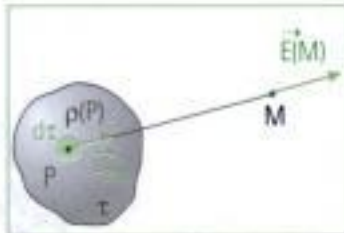


Fig. 17 - Sources du champ électrique en M.

3. On prend le gradient en M après avoir sommé sur les points P, la dérivée ne peut donc s'appliquer sur les coordonnées de P. Le calcul est réalisable mais n'a pas d'intérêt physique. Il n'est donc pas détaillé.

## F.4. Obtention des champs

Au point M où le champ existe, les relations entre champs et potentiels font intervenir les opérateurs gradient et rotationnel. La dérivée spatiale est effectuée par rapport aux coordonnées du point M. C'est en effet autour de M que le champ est calculé et peut éventuellement varier.

En appliquant la relation  $\vec{E} = -\text{grad}_M V$ , on retrouve la **loi de Coulomb** (fig. 17) :

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{P \in \tau} \frac{\rho(P)\vec{PM}}{PM^3} d\tau = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{P \in \tau} \frac{\rho(P)\vec{u}_{PM}}{PM^2} d\tau,$$

avec  $\vec{u}_{PM}$  le vecteur unitaire porté par le vecteur  $\vec{PM}$ .

L'ensemble des propriétés du champ électrostatique est donc contenu dans les deux seules équations locales de Maxwell dans lesquelles il apparaît.

De manière analogue, le champ magnétique est obtenu grâce à la relation  $\vec{B} = \text{rot}_M \vec{A}$  et permet de retrouver l'expression :

#### Loi 3

##### Loi de Biot et Savart pour le champ magnétique

Le champ magnétique  $\vec{B}$  créé en un point M par une distribution de courant volumique se trouvant aux points P d'un volume  $\tau$  s'écrit :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{P \in \tau} \frac{\vec{j}(P) \wedge \vec{u}_{PM}}{PM^2} d\tau.$$

On peut simplifier cette intégrale dans le cas de courants filiformes (le conducteur filiforme est orienté dans le sens du courant I (fig. 18)) :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{P \in l} \frac{d\vec{l} \wedge \vec{u}_{PM}}{PM^2}.$$

L'ensemble des propriétés du champ magnétique est donc contenu dans les deux seules équations locales de Maxwell dans lesquelles il est présent.

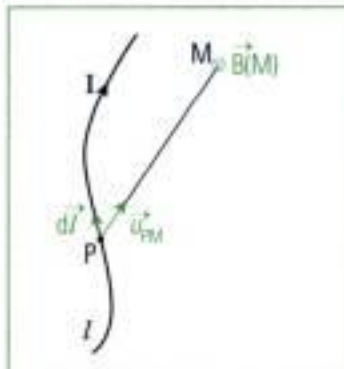


Fig. 18 - Sources du champ magnétique en M.



## G. Quelques dispositifs électrostatiques

1. Les champs et densités de charges que l'on considère sont donc des constantes indépendantes du temps.

On étudie dans cette partie les propriétés électrostatiques<sup>1</sup> d'un conducteur chargé, puis de deux conducteurs chargés à proximité l'un de l'autre. On définira alors le phénomène d'influence entre deux conducteurs et on verra que le condensateur peut être défini comme un système de deux conducteurs en influence.

### G.1. Conducteur parfait en équilibre

#### G.1.1. Définition

##### Définition 6

Un conducteur est un milieu tel qu'une charge électrique ne peut être en équilibre en l'un de ses points que si elle n'est soumise à aucune force.

Cette définition est équivalente à dire que le conducteur possède des charges électriques « libres », c'est-à-dire susceptibles de pouvoir se déplacer librement.

Dans un conducteur, le mouvement des charges dépend du champ électrique qui y règne.

##### Loi 4

##### Loi d'Ohm locale

En tout point d'un milieu conducteur, la densité de courant volumique  $\vec{j}$  et le champ électrique  $\vec{E}$  sont proportionnels :

$$\vec{j} = \gamma \vec{E}.$$

Le coefficient de proportionnalité  $\gamma$  est appelé **conductivité du conducteur** et est mesuré en  $\text{S}\cdot\text{m}^{-1}$ .

La conductivité  $\gamma$  ne dépend que de la nature du milieu et de la température.

##### Définition 7

Le conducteur est dit **parfait** lorsque sa conductivité est infinie :

$$\gamma \rightarrow \infty.$$

#### G.1.2. Caractéristiques électriques du conducteur

• Si, en un point  $M$  du conducteur en équilibre, le champ électrique n'était pas nul, alors les charges libres se mettraient en mouvement sous l'action de la force de Coulomb.

Ce résultat est alors en contradiction avec l'hypothèse du conducteur en équilibre dans lequel les charges sont immobiles.

##### Propriété 14

En tout point  $M$  de l'intérieur d'un conducteur en équilibre, le champ électrique est nul :

$$\vec{E} = \vec{0}.$$

1. Attention, les équations de Maxwell ne sont plus valables dès lors qu'on se trouve sur une surface chargée ou parcourue par des courants de surface. Il faut alors utiliser les relations de passage démontrées §E.

- Les équations de Maxwell sont valables en tout point intérieur au conducteur<sup>1</sup>, notamment celle de Maxwell-Gauss :  $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ . Avec  $\vec{E} = \vec{0}$ , on obtient :

#### Propriété 15

En tout point intérieur du conducteur, on a :

$$\rho = 0.$$

L'intérieur du conducteur n'est pas chargé : la charge des électrons libres compense exactement celle des ions positifs du réseau cristallin.

- En statique, le champ et le potentiel sont reliés par la relation :

$$\vec{E} = -\text{grad } V.$$

Avec  $\vec{E} = \vec{0}$ , on a donc :

#### Propriété 16

En tout point intérieur du conducteur, on a :

$$\text{grad } V = \vec{0}, \text{ soit } V = \text{Constante.}$$

L'ensemble du volume conducteur constitue une équipotentielle.

- Pour un conducteur chargé en équilibre électrostatique :

#### Propriété 17

La charge portée par un conducteur en équilibre est nécessairement située sur la **surface externe du conducteur** avec une densité surfacique  $\sigma$ . Elle y est disposée de telle manière que le champ électrique  $\vec{E}$  est nul en tout point intérieur du conducteur.

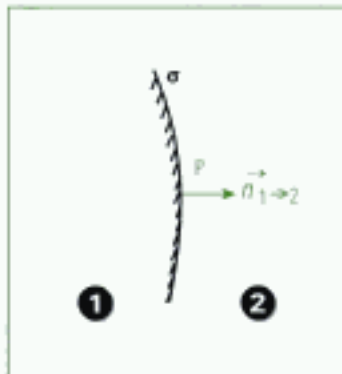


Fig. 19 - Conducteur de densité surfacique de charges  $\sigma$ .

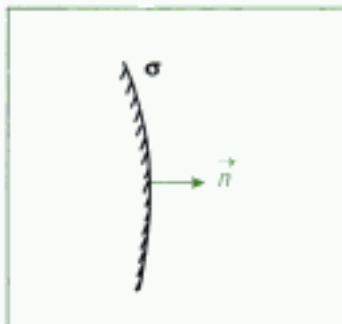


Fig. 20 - Le champ électrique  $\vec{E}$  est porté par  $\vec{n}$  au voisinage du conducteur.

### G.1.3. Champ électrique $\vec{E}$ au voisinage du conducteur : théorème de Coulomb

On applique les conditions de passage du vecteur champ électrique  $\vec{E}$  au voisinage de la surface qui sépare le milieu conducteur du vide dans lequel il est placé. En notant ① le milieu conducteur et ② le vide, et en notant  $\sigma$  la densité surfacique de charges en un point P de la surface du conducteur (fig. 19), on écrit :

$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}_{1 \rightarrow 2} \Leftrightarrow \vec{E}_2 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}_{1 \rightarrow 2}$ , car dans le conducteur, le champ  $\vec{E}$  est nul. On a donc :

#### Théorème 3

##### Théorème de Coulomb

Au voisinage immédiat du conducteur en équilibre, le champ électrique est normal (fig. 20) au conducteur et vaut :

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}.$$

$\sigma$  et  $\vec{n}$  sont respectivement la densité surfacique de charges et la normale sortante du conducteur au point considéré.



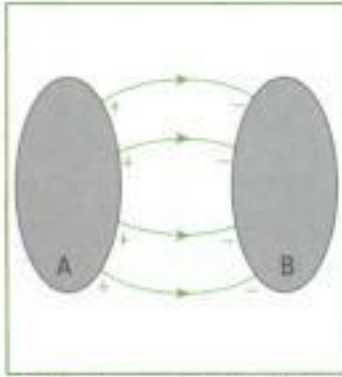


Fig. 21 - Les systèmes A et B sont en influence totale.

1. On néglige alors « les effets de bord », c'est-à-dire que l'on ne tient pas compte des lignes de champ qui partent ou arrivent sur un conducteur sans aller ou provenir de l'autre.

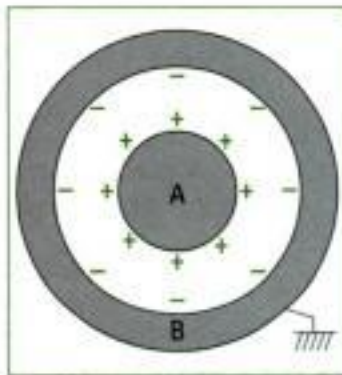


Fig. 22 - Le conducteur B est relié à la Terre.

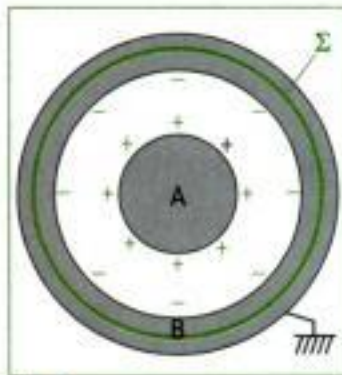


Fig. 23 - La surface  $\Sigma$  est contenue dans le conducteur B.

### G.1.4. Influence entre deux conducteurs

Approchons un conducteur A chargé d'un conducteur B initialement neutre, et attendons l'équilibre.

Si aucune charge n'apparaît sur B, alors les lignes du champ électrique créées par les charges du conducteur A traversent le conducteur B : le champ électrique n'est plus nul dans B, ce qui est contradictoire avec sa situation d'équilibre. Une distribution de charges apparaît donc sur le conducteur B et crée en tout point de B un champ électrique  $\vec{E}$  qui s'oppose à celui créé par A : c'est le **phénomène d'influence** et on dit que **le conducteur A influence le conducteur B**.

## G.2. Le condensateur

### G.2.1. Définition

#### Définition 8

Un **condensateur** est constitué par un système de deux conducteurs en influence totale (fig. 21) : toutes les lignes de champ vont d'un conducteur vers l'autre.<sup>1</sup>

Le cas idéal se produit lorsque le conducteur influencé entoure complètement le conducteur influençant.

Lorsque le conducteur B est relié à la Terre, aucune ligne de champ ne peut en partir (fig. 22) : il ne porte aucune charge sur sa surface externe. La seule charge est celle apparue par influence du conducteur A. La valeur positive de cette charge est appelée charge du condensateur.

### G.2.2. Charges des conducteurs

On place le conducteur A chargé à l'intérieur du conducteur B, avec une charge  $Q_A$ . On met le conducteur B à la Terre : la face interne de B porte la charge  $Q_B$ .

On imagine une surface fermée  $\Sigma$ , entièrement contenue dans le conducteur B (fig. 23). Cette surface contient les charges  $Q_A$  et  $Q_B$  ; elle est située dans une région (intérieur de B) où le champ électrique est nul.

Appliquons le théorème de Gauss :

$$\oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0 = \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = \frac{Q_A + Q_B}{\epsilon_0}, \text{ soit } Q_B = -Q_A.$$

#### Propriété 18

Les armatures d'un condensateur portent des charges opposées.

La charge  $Q$  du condensateur est la charge positive portée par l'un des conducteurs en influence totale :  $Q = |Q_B| = |Q_A|$ .

### G.2.3. Capacité du condensateur

On note  $\sigma_A$  et  $\sigma_B$  les densités surfaciques sur les faces  $\Sigma_A$  et  $\Sigma_B$  des conducteurs A et B en regard.

Les charges  $Q_A$  et  $Q_B$  des deux conducteurs A et B s'écrivent :

$$Q_A = \iint_{\Sigma_A} \sigma_A dS \text{ et } Q_B = \iint_{\Sigma_B} \sigma_B dS.$$



1. On applique ici le principe de superposition des champs électriques créés par les surfaces  $\Sigma_A$  et  $\Sigma_B$ .

2. On la suppose positive, on impose donc  $Q_A > 0$ .  $Q_A$  est alors la charge du condensateur.

3. On applique le principe de superposition. On superpose  $n$  états d'équilibre. La superposition est un état d'équilibre, les charges s'ajoutent, ainsi que leur conséquence, c'est-à-dire les champs créés. Ce principe est une conséquence de la linéarité des équations de Maxwell.

4. La dimension  $d$  des plans doit être très supérieure à la distance  $e$  séparant les deux plans.

5. Les supports matériel des charges, les armatures, sont constituées de conducteurs, lesquels ont la propriété de conserver la charge électrique sur leur surface.

Le champ électrique créé en un point  $M$  de l'espace inter-armatures est :

$$\vec{E}(M) = \iint_{\Sigma_A} \frac{\sigma_A dS}{4\pi\epsilon_0 PM^3} \overrightarrow{PM} + \iint_{\Sigma_B} \frac{\sigma_B dS}{4\pi\epsilon_0 PM^3} \overrightarrow{PM}.$$

La différence de potentiel entre les deux conducteurs<sup>2</sup> s'écrit :

$$U = V_A - V_B = \int_A^B \vec{E}(M) \cdot d\vec{l}$$

Si on multiplie la densité surfacique de charges  $\sigma_A$  par un nombre  $n$ , alors la charge  $Q_A$  est aussi multipliée par  $n$ , et par suite la charge  $Q_B$  et la densité  $\sigma_B$  de l'autre armature. Le champ  $\vec{E}(M)$  créé en  $M$  et la différence de potentiel  $U$  existant entre les conducteurs  $A$  et  $B$  est alors également multipliée par  $n$ .<sup>3</sup> On a donc :

#### Définition 9

La charge  $Q$  du condensateur et la différence de potentiel  $U$  entre ses armatures sont proportionnelles. On appelle  $C$  ce coefficient de proportionnalité :

$$Q = CU.$$

$C$  est appelé la **capacité du condensateur**, mesurée en Farad (symbole F).

## G.3. Application au condensateur plan

L'étude électrostatique menée ici permet de construire le condensateur, pour lequel on définit et on calcule l'expression de sa capacité  $C$ . Des considérations de type « électrostatiques » aboutissent à l'expression de l'énergie potentielle de ce composant électronique déjà étudié dans le cours d'électrocinétique.

### G.3.1. Définition

Un condensateur plan est constitué de deux plans de grandes dimensions<sup>4</sup>, parallèles, distants d'une longueur  $e$ , portant des charges opposées  $-q$  et  $+q$  réparties sur chacun d'eux avec une densité surfacique  $\sigma$  uniforme (fig. 24).

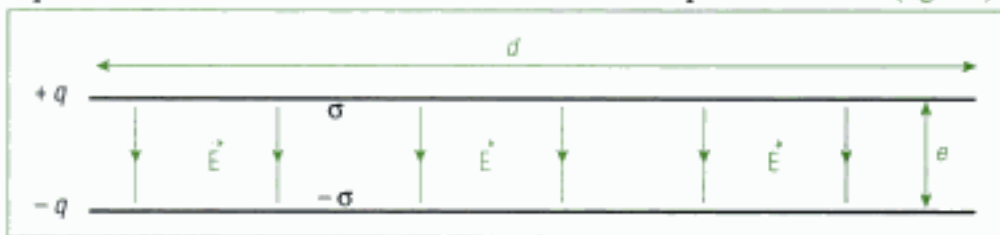


Fig. 24 – Modélisation d'un condensateur plan.

Ces plans sont appelés armatures du condensateur<sup>5</sup>. Le condensateur est dit parfait si toutes les lignes de champ relient une armature à l'autre : le champ électrostatique est nul hors de l'espace inter-armatures. On dit aussi que le champ est nul à l'extérieur du condensateur.

#### Définition 10

Un condensateur plan est formé de deux armatures planes, parallèles et portant des charges électriques opposées avec des densités surfaciques uniformes et opposées.

1. On sait que le champ  $\vec{E}$  n'est pas défini aux points situés sur les surfaces chargées. On ne cherche donc pas à calculer le champ  $\vec{E}$  sur les armatures. En revanche, le point M peut être intérieur ou extérieur au condensateur.

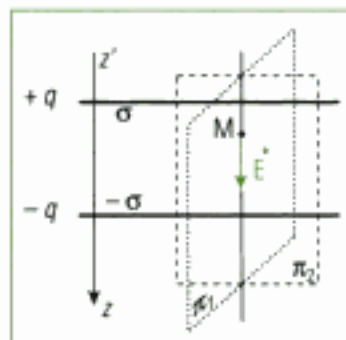


Fig. 25 – Champ  $\vec{E}$  à l'intérieur d'un condensateur plan.

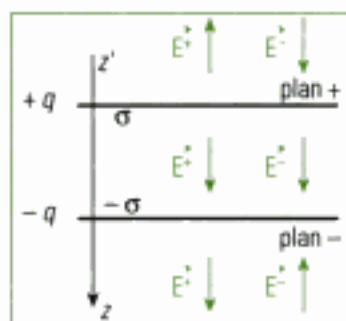


Fig. 26 – Champ total  $\vec{E}$  à l'intérieur et à l'extérieur des armatures.

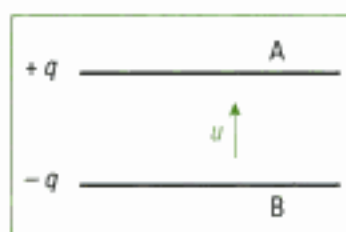


Fig. 27 – Différence de potentiel entre les armatures d'un condensateur.

2. La notion de plan « infini » n'est qu'une hypothèse de calcul, vérifiée par les mesures expérimentales lorsque  $d \ll \sqrt{S}$  est très grand devant  $e$ .

### G.3.2. Champ électrostatique créé

On veut déterminer le champ  $\vec{E}$  à l'extérieur, mais surtout à l'intérieur du condensateur.

On considère que les deux plans sont infiniment grands (illimités) et orthogonaux à l'axe ( $z'z$ ). Soit un point M de l'espace et n'étant pas situé sur les charges<sup>1</sup> (c'est-à-dire sur les armatures) (fig. 25).

Le champ  $\vec{E}$  créé au point M par ces deux plans est la somme des champs créés par chacun des plans.

Le champ  $\vec{E}$  créé par un plan uniformément chargé avec une densité surfacique de charges est orthogonal au plan ; il est dirigé vers les charges si elles sont positives, vers l'opposé si elles sont négatives et il a pour norme  $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$  (où  $\sigma > 0$ ).

On nomme  $\vec{E}^+$  et  $\vec{E}^-$  les champs créés en tout point M respectivement par les plans chargés positivement (« plan + ») et négativement (« plan - »). On remarque qu'en dehors des armatures, ces deux champs se compensent car ils ont la même norme et des sens opposés : le champ résultant est nul. En revanche, entre les armatures, ils s'ajoutent (fig. 26) :

$$\vec{E} = \vec{E}^+ + \vec{E}^- = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_z + \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_z = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_z.$$

#### Loi 5

À l'extérieur du condensateur plan, le champ électrostatique est nul ; entre ses armatures, il vaut :

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_z.$$

### G.3.3. Différence de potentiel

On note A l'armature positive, B l'armature négative, et  $u = V_A - V_B$  la différence de potentielle (positive) entre les armatures du condensateur (fig. 27).

Pour déterminer une différence de potentiel, il faut calculer la circulation du champ  $\vec{E}$  :

$$\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_A^B -\text{grad}V \cdot d\vec{l} = V_A - V_B = u.$$

et comme  $\vec{E}$  est uniforme :

$$\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = \vec{E} \cdot \int_A^B d\vec{l} = \vec{E} \cdot \vec{AB}.$$

Comme  $\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_z$  et  $\vec{AB} = e \vec{u}_z$  :

$$V_A - V_B = u = \vec{E} \cdot \vec{AB} = \frac{\sigma e}{\epsilon_0}.$$

Si l'on nomme S la surface totale du plan<sup>2</sup>, alors on peut exprimer sa charge q en fonction de la densité  $\sigma$  :  $q = \sigma S$ . La relation devient :

$$V_A - V_B = u = \frac{qe}{\epsilon_0 S}.$$

Lorsque q désigne la charge de l'armature positive et u la tension positive prise aux bornes du condensateur, on a :

$$q = Cu,$$

où  $C = \frac{\epsilon_0 S}{e}$  est la capacité du condensateur plan.

### G.3.4. Énergie potentielle électrostatique

Pour former un condensateur plan, un opérateur a dû rassembler les charges électriques pour arriver à la situation finale dans laquelle les armatures portent les charges  $+q$  et  $-q$ . Pour cela, il a dû effectuer un travail qui est égal à l'énergie potentielle électrostatique du condensateur.

Les charges sont amenées de manière successive sur chacune des deux armatures (en notant A l'armature positive et B l'armature négative). Pendant leur charge, les armatures A et B portent respectivement la charge  $+ \alpha q$  et  $- \alpha q$ , où  $\alpha$  est un réel compris entre 0 et 1 (0 lorsque le condensateur est non chargé et 1 à la fin de la charge du condensateur). Leur potentiel vaut  $\alpha V_A$  et  $\alpha V_B$  respectivement et la différence de potentiel s'écrit :

$$\alpha u = \alpha(V_A - V_B) = \frac{\alpha q}{C}.$$

L'opérateur amène alors une charge élémentaire sur chacune des armatures :  $q d\alpha$  sur A et  $-q d\alpha$  sur B.

Le travail élémentaire  $dW_{\text{op}}$  effectué par l'opérateur équivaut à la somme des travaux  $q d\alpha \times (\alpha V_A - 0)$  et  $-q d\alpha \times (\alpha V_B - 0)$  nécessaires pour amener respectivement la charge  $q d\alpha$  sur A et la charge  $-q d\alpha$  sur B depuis des positions infiniment éloignées (où le potentiel est nul). Donc :

$$dW_{\text{op}} = q d\alpha \times (\alpha V_A - \alpha V_B) = q d\alpha \alpha u = q u d\alpha.$$

Le travail total nécessaire à la charge complète du condensateur a été effectué lorsque  $\alpha$  passe de la valeur 0 à la valeur 1 :

$$W_{\text{op}} = \int_{\alpha=0}^1 dW_{\text{op}} = q u \int_{\alpha=0}^1 \alpha d\alpha = q u \left[ \frac{\alpha^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2} q u.$$

Ce travail est identique à l'énergie potentielle électrostatique acquise par la distribution de charges (le condensateur en l'occurrence).

#### Loi 6

Un condensateur, de capacité  $C$  et portant la charge  $q$ , a une différence de potentiel  $u$  entre ses bornes telle que  $q = Cu$  et son énergie potentielle a pour expression<sup>1</sup> :

$$E_p = \frac{1}{2} q u = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} = \frac{1}{2} C u^2.$$

$E_p$  énergie potentielle (J)  
 $q$  charge en coulomb (C)  
 $u$  tension en volt (V)  
 $C$  capacité en farad (F)

1. On retrouve cette expression en électrocinétique et on la retrouvera en seconde année en intégrant la densité volumique d'énergie électromagnétique du champ créé par le condensateur sur tout l'espace où  $E$  est non nul, c'est-à-dire sur tout l'espace inter-armatures.

2. Pierre Simon de Laplace (1749-1827), mathématicien et physiciens français, a contribué de manière décisive à l'application des mathématiques aux problèmes de la physique. On lui doit notamment l'utilisation de l'opérateur laplacien, l'invention de la force de Laplace et la loi de Laplace. C'est le premier à penser à une nébuleuse primitive à l'origine de l'univers, précurseur de la théorie du big bang.

## H. Compléments de magnétostatique

Cette partie vient en complément du cours de magnétostatique de première année.

### H.1. Forces de Laplace

La force de Laplace<sup>2</sup> est la force que subit un conducteur parcouru par un courant électrique sous l'action du champ magnétique dans lequel il est plongé.



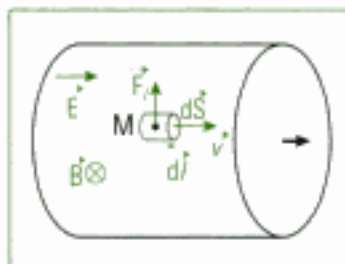


Fig. 28 - Le point M est le centre d'un élément de volume  $d\tau$ .

1. Le conducteur possède  $n$  charges mobiles par unité de volume.

### H.1.1. Force élémentaire

Un point M, centre d'un élément de volume  $d\tau = dSdl$ , contient un nombre de charges mobiles égal à  $dN = nd\tau = ndSdl$  (fig. 28)<sup>1</sup>.

Une charge de ce volume possède la vitesse  $\vec{v}$  et est soumise à la force de Lorentz  $\vec{F}_l = q\vec{v} \wedge \vec{B}$ .

La force s'exerçant sur l'ensemble des charges du volume  $d\tau$  est donc :

$$d^3\vec{F}_l = dN\vec{F}_l = nq\vec{v} \wedge \vec{B}d\tau = \vec{j} \wedge \vec{B}d\tau.$$

Cette force est aussi la force de Laplace élémentaire à laquelle est soumis l'élément de volume  $d\tau$ .

On peut définir une densité volumique de force de Laplace, égale à la force de Laplace subie par unité de volume :

$$\frac{d^3\vec{F}_l}{d\tau} = \vec{j} \wedge \vec{B}.$$

#### Définition 11

La densité volumique de force de Laplace  $\frac{d^3\vec{F}_l}{d\tau}$  subie par un conducteur traversé par un courant de densité  $\vec{j}$  et plongé dans un champ magnétique  $\vec{B}$  vaut :

$$\frac{d^3\vec{F}_l}{d\tau} = \vec{j} \wedge \vec{B}.$$

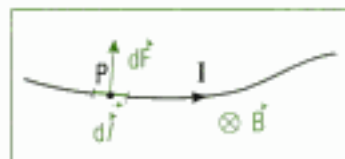


Fig. 29 - Cas d'un conducteur filiforme.

Lorsque le conducteur est filiforme (fig. 29), on cherche plutôt la force qu'il subit par élément de longueur, sa surface restant de petites dimensions.

On obtient cette force en intégrant la force  $d^3\vec{F}_l = \vec{j} \wedge \vec{B}d\tau$  sur la section  $S$  du conducteur :

$$\begin{aligned} d\vec{F}_l &= \iint_S d^3\vec{F}_l = \iint_S \vec{j} \wedge \vec{B}d\tau = \iint_S \vec{j} \wedge \vec{B}d\vec{l} \cdot d\vec{S} \\ &= \iint_S d\vec{l} \wedge \vec{B} \vec{j} \cdot d\vec{S} \quad \text{car } d\vec{l} \text{ et } \vec{j} \text{ sont colinéaires} \\ &= \left( \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} \right) d\vec{l} \wedge \vec{B} \\ &= I d\vec{l} \wedge \vec{B} \end{aligned}$$

#### Propriété 19

La force de Laplace  $d\vec{F}_l$  que subit un élément de longueur  $d\vec{l}$  d'un conducteur filiforme parcouru par un courant d'intensité  $I$  vaut :

$$d\vec{F}_l = I d\vec{l} \wedge \vec{B}.$$

La force de Laplace que subit un circuit filiforme parcouru par un courant d'intensité  $I$  et plongé dans un champ magnétique  $\vec{B}$  est la somme des forces de Laplace que subissent les éléments de longueur qui constituent le circuit :

$$\vec{F}_l = \int_{\text{fil}} d\vec{F}_l = I \int_{\text{fil}} d\vec{l} \wedge \vec{B}.$$

2. La signification physique de l'intégrale est une addition d'une infinité d'éléments infiniment petits et voisins les uns des autres dans le domaine continu où on les ajoute.

### H.1.2. Force résultante

Pour obtenir la résultante des forces de Laplace, on intègre<sup>2</sup> la force élémentaire  $d\vec{F}_l$  sur le domaine de l'espace qui lui correspond.

Lorsqu'il s'agit d'un courant volumique dont la densité est  $\vec{j}$  dans un volume  $\tau$ , on intègre sur ce volume les forces élémentaires :

**Propriété 20**

La **résultante des forces de Laplace** que subissent les courants de densité  $\vec{j}$  présents dans le volume  $\tau$  est égale à :

$$\vec{F}_l = \iiint_{\tau} d\vec{F}_l = \iiint_{\tau} \vec{j} \wedge \vec{B} d\tau.$$

Lorsqu'il s'agit d'une portion  $\Gamma$  de circuit linéique :

**Propriété 21**

La **résultante des forces de Laplace** que subit le circuit  $\Gamma$  parcouru par un courant d'intensité  $I$  plongé dans un champ magnétique  $\vec{B}$  est égale à :

$$\vec{F}_l = \int_{\Gamma} d\vec{F}_l = \int_{\Gamma} I d\vec{l} \wedge \vec{B}.$$

### H.1.3. Moment résultant

On cherche l'expression du moment en un point A quelconque des forces de Laplace qui s'exercent sur des courants pouvant être volumiques.

Considérons une portion  $\Gamma$  de circuit linéique parcourue par un courant d'intensité  $I$ . Soit un point P de cette portion de circuit, centre d'un élément de longueur  $d\vec{l}$ . Cet élément de circuit subit la force élémentaire :

$$d\vec{F}_l(P) = I d\vec{l} \wedge \vec{B},$$

où le vecteur  $d\vec{l}$  est orienté dans le sens de parcours du courant.

Le moment au point A de cette force élémentaire qui s'exerce en P est :

$$d\vec{M}_A = \overrightarrow{AP} \wedge d\vec{F}_l(P) = \overrightarrow{AP} \wedge (I d\vec{l} \wedge \vec{B}).$$

Le moment résultant est la somme des moments de chaque force élémentaire :

**Propriété 22**

Le **moment résultant au point A** des forces de Laplace qui s'exercent sur la portion de circuit linéique  $\Gamma$  parcourue par le courant d'intensité  $I$  est :

$$\vec{M}_A = \int_{\Gamma} d\vec{M}_A = \int_{P \in \Gamma} \overrightarrow{AP} \wedge (I d\vec{l} \wedge \vec{B}).$$

Lorsqu'il s'agit d'un courant volumique dont la densité est  $\vec{j}$  dans un volume  $\tau$ , on intègre sur ce volume les moments des forces élémentaires :

**Propriété 23**

Le **moment résultant au point A** des forces de Laplace que subissent les courants de densité  $\vec{j}$  présents dans le volume  $\tau$  est égal à :

$$\vec{M}_A = \iiint_{\tau} d\vec{M}_A = \iiint_{P \in \tau} \overrightarrow{AP} \wedge (\vec{j}(P) \wedge \vec{B}(P)) d\tau.$$

1. On rappelle que le courant de déplacement est un courant fictif qui traduit une équivalence avec les variations temporelles du champ électrique.

2. Voir le Théorème 2 §C.4. Le théorème d'Ampère généralisé est le bilan macroscopique de l'équation locale de Maxwell-Ampère.

3. On rappelle qu'il n'est pas défini sur les courants linéiques et qu'il n'est pas continu à la traversée de courants de surface.

## H.2. Théorème d'Ampère

En statique, le courant de déplacement<sup>1</sup>  $\vec{j}_D = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  est nul. Le théorème d'Ampère généralisé<sup>2</sup> se simplifie alors et on trouve :

### Théorème 4

#### Théorème d'Ampère

Si  $I$  est l'intensité du courant traversant une surface ouverte  $S$  qui s'appuie sur le contour (ligne fermée)  $\Gamma$ , alors on a :

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = I, \text{ avec } I = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}.$$

On notera que, lorsque la distribution de courant est volumique, le champ magnétique  $\vec{B}$  est défini et continu en tout point.<sup>3</sup>

Il convient donc de calculer le flux de la densité de courant  $\vec{j}$  à travers la surface  $S$  qui s'appuie sur le contour d'Ampère que l'on a choisi. Les courants qui ne traversent pas la surface  $S$  considérée ne constituent pas une source du champ magnétique qui règne au point  $M$  élément du contour d'Ampère considéré.

### Application Calcul du champ magnétique

Déterminer le champ magnétique  $\vec{B}$  créé par un fil cylindrique rectiligne d'axe  $Oz$ , de section circulaire de rayon  $R$ , parcouru par un courant volumique de densité uniforme et d'intensité totale  $I$ .

#### Solution

Le courant est volumique, le champ magnétique  $\vec{B}$  est donc défini et continu en tout point de l'espace.

Au vu la forme de la distribution de courant, on choisit le système de coordonnées cylindriques.

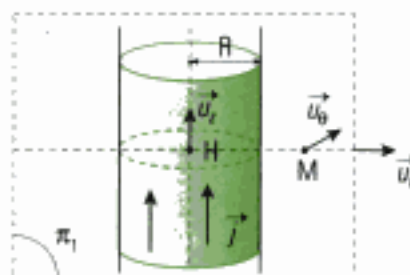
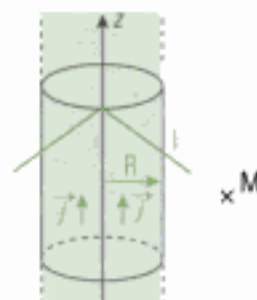
Ce choix est validé par les invariances par rotation d'angle  $\theta$  autour de l'axe  $Oz$  et par translation le long de l'axe  $Oz$  ( $B = \|\vec{B}\|$  ne dépend pas de  $\theta$  et  $z$ ).

Soit  $M$  le point où l'on cherche le champ  $\vec{B}$ . Le plan  $\pi_1 = (M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$  est plan de symétrie pour la distribution de courant. On en conclut que le champ  $\vec{B}$  en  $M$  est orthogonal à ce plan :  $\vec{B} = B\vec{u}_\theta$ .

Finalement, on écrit :  $\vec{B} = B(r)\vec{u}_\theta$ .

Les lignes de champ sont donc des cercles centrés sur l'axe  $Oz$ .  $\vec{B}$  y est tangent en tout point, et son module reste constant le long d'une ligne de champ : le contour  $\Gamma$  d'Ampère sera un cercle de rayon  $r$  centré sur l'axe et la surface  $S$  s'appuyant dessus sera le disque de rayon  $r$ , car alors  $d\vec{S} = dS \vec{n} = dS \vec{u}_z$  et  $\vec{j} = \frac{I}{\pi R^2} \vec{u}_z$  sont colinéaires, ce qui facilite le calcul du produit scalaire.

On s'aperçoit que deux cas vont apparaître : soit  $M$  se trouve à l'extérieur du câble ( $r > R$ ) et le courant total d'intensité  $I$  traverse la surface  $S$ , soit  $M$  se trouve dans le câble ( $r < R$ ) et l'intensité  $i$  qui traverse la surface  $S$  est une fraction de l'intensité totale  $I$ .





On en déduit que :

Lorsque  $r > R$ ,  $\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = 2\pi r B(r) = \mu_0 I$  (on fera attention à l'orientation du contour  $\Gamma$ ), soit enfin :

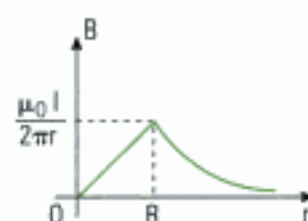
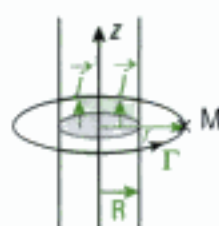
$$\vec{B}(r > R) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\theta.$$

Lorsque  $r < R$ , on a toujours  $\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = 2\pi r B(r) = \mu_0 i$ , mais avec :

$$i = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = j \times \pi r^2 = \frac{r^2}{R^2} I, \text{ car } j = \frac{I}{\pi R^2}. \text{ Il vient alors :}$$

$$\vec{B}(r < R) = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2} \vec{u}_\theta.$$

Le tracé de la courbe  $B = f(r)$  permet de vérifier la continuité du champ magnétique  $\vec{B}$ .



## H.3. Le dipôle magnétique

### H.3.1. Moment magnétique

On introduit la notion de moment magnétique en utilisant le modèle de la spire circulaire de rayon  $R$ . Soit  $I$  l'intensité du courant qui la traverse,  $\vec{n}$  étant sa normale orientée conformément au sens de l'intensité  $I$  (fig. 30).

On définit le vecteur surface de cette spire par :

$$\vec{S} = \iint d\vec{S} = \iint dS \vec{n} = \pi R^2 \vec{n}.$$

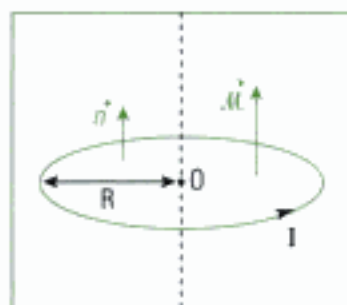


Fig. 30 - Spire circulaire parcourue par un courant d'intensité  $I$ .

1. Le circuit filiforme est plan dans tous les cas envisagés, de sorte que la normale  $\vec{n}$  reste inchangée.

#### Définition 12

Le **moment magnétique**  $\vec{M}$  d'un circuit filiforme est défini par :

$$\vec{M} = I \vec{S} \quad \begin{array}{l} \vec{M} \text{ moment magnétique (A} \cdot \text{m}^2) \\ I \text{ intensité (A)} \\ \vec{S} \text{ surface (m}^2) \end{array}$$

où  $\vec{S}$  est le vecteur surface de ce circuit filiforme fermé et  $I$  l'intensité du courant qui le traverse<sup>1</sup>.

Tout circuit électrique parcouru par un courant possède donc un moment magnétique.

On parlera de moment magnétique actif lorsque l'on s'intéressera au champ magnétique créé par le moment magnétique (et plus généralement aux actions créées par le moment magnétique sur d'autres courants), et de moment magnétique passif lorsque l'on étudiera les actions subies par le moment magnétique et exercées par un champ magnétique extérieur (créé par d'autres courants).

### H.3.2. Dipôle magnétique

L'approximation dipolaire permet de définir la notion de dipôle magnétique.

#### Définition 13

On parle de dipôle magnétique actif si l'étendue du moment magnétique est très petite devant la distance à laquelle on étudie le champ magnétique qu'il crée (fig. 31).

On parle de dipôle magnétique passif si l'étendue du moment magnétique est très petite devant la distance caractéristique de variation du champ magnétique extérieur dont il subit l'action.

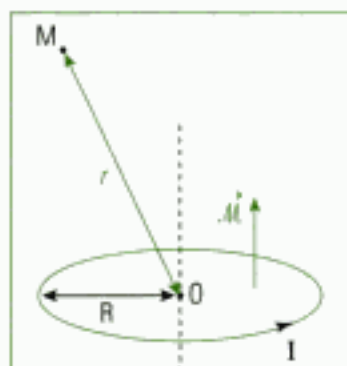


Fig. 31 - Dipôle magnétique actif :  $r \gg R$ .

1. Le schéma n'est donc évidemment pas à l'échelle.
2. La position de M satisfait la condition de l'approximation du dipôle actif.



Fig. 32 - Système de coordonnées sphériques.

Pour le point M, la spire est un dipôle magnétique actif<sup>1</sup> si  $r \gg R$ .

### H.3.3. Champ magnétique créé par un dipôle magnétique

L'expression du champ magnétique  $\vec{B}$  créé par un dipôle magnétique en un point M est admise<sup>2</sup> (conformément au programme officiel).

On la donne sous forme intrinsèque, puis dans un système de coordonnées sphériques dont l'axe (Oz) est celui du moment magnétique dipolaire  $\vec{M}$ . L'origine O du repère sphérique est placée à l'endroit où se trouve le moment dipolaire (fig. 32).

#### Définition 14

Dans l'approximation dipolaire, l'expression du champ magnétique  $\vec{B}$  créé en un point M « lointain » par un dipôle magnétique est :

• *expression intrinsèque :*

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \times \frac{3(\vec{M} \cdot \vec{u}_r)\vec{u}_r - \vec{M}}{r^3}$$

$\vec{B}$  champ magnétique en tesla (T)  
 $\mu_0$  permittivité du vide  
 $\vec{M}$  moment magnétique dipolaire ( $A \cdot m^2$ )  
 $r$  distance en mètre (m)

• *expression en coordonnées sphériques :*

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \times \frac{2M \cos \theta \vec{u}_r + M (\sin \theta) \vec{u}_\theta}{r^3},$$

avec  $B_r = \frac{\mu_0 M \cos \theta}{2\pi r^3}$ ,  $B_\theta = \frac{\mu_0 M \sin \theta}{4\pi r^3}$  et  $B_\phi = 0$ .

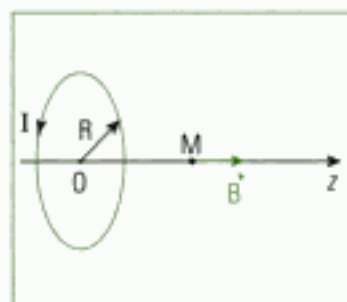


Fig. 33 - Champ magnétique  $\vec{B}$  créé en M par une spire circulaire parcourue un courant I.

### H.3.4. Cas de la spire circulaire

Vérifions les expressions précédentes en les appliquant à une spire circulaire.

Le champ magnétique  $\vec{B}$  créé par une spire circulaire en un point M de son axe de révolution (fig. 33) a pour expression :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I R^2}{2(\sqrt{R^2 + z^2})^3} \vec{u}_z.$$

Plaçons nous dans l'approximation dipolaire et comparons ce champ avec l'expression générale donnée dans la définition 14.

Le moment magnétique de la spire est  $\mathcal{M} = IS = \pi R^2 I$ , donc :  $R^2 I = \frac{\mathcal{M}}{\pi}$ .

De plus, dans l'approximation dipolaire, le point M est éloigné de la spire, donc  $z \gg R$  et par conséquent :

$$(\sqrt{R^2 + z^2})^3 = OM^3 = z^3.$$

Le champ a donc comme expression :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2z^3} \frac{\mathcal{M}}{\pi} \vec{u}_z = \frac{\mu_0 \mathcal{M}}{2\pi z^3} \vec{u}_z.$$

Or, pour un point de l'axe,  $\theta = 0$ ,  $z = r$  et  $\vec{u}_z = \vec{u}_r$ , et on retrouve l'expression de la composante radiale du champ magnétique créé par un dipôle.

### H.3.5. Comparaison avec le dipôle électrostatique

Dans l'approximation dipolaire, on remarque une grande similitude entre les champs créés d'une part par le dipôle magnétique et, d'autre part, par le dipôle électrostatique.

Pour le dipôle magnétique, on rappelle les composantes du champ magnétique  $\vec{B}$  créé en un point M éloigné, en coordonnées sphériques (fig. 34) :

$$B_r = \frac{\mu_0 \mathcal{M} \cos \theta}{2\pi r^3} \quad \text{et} \quad B_\theta = \frac{\mu_0 \mathcal{M} \sin \theta}{4\pi r^3}.$$

Pour le dipôle électrostatique, les composantes du champ électrostatique  $\vec{E}$  créé en un point M éloigné s'écrivent en coordonnées sphériques (fig. 35) :

$$E_r = \frac{\rho \cos \theta}{2\pi \epsilon_0 r^3} \quad \text{et} \quad E_\theta = \frac{\rho \sin \theta}{4\pi \epsilon_0 r^3}.$$

Il existe une grande similitude des figures et donc du système de coordonnées. Dans l'approximation dipolaire, les lignes de champ ont aussi la même allure, car il suffit de remplacer  $\mathcal{M}$  par  $\rho$  et  $\mu_0$  par  $\frac{1}{\epsilon_0}$  pour passer du champ magnétique  $\vec{B}$  créé par le dipôle magnétique au champ électrostatique  $\vec{E}$  créé par le dipôle électrostatique. La carte de champ est donc la même (fig. 36), à condition de respecter l'approximation dipolaire, c'est-à-dire à condition de ne pas prendre en compte les portions de lignes de champ proches du point O où se trouve le dipôle.

Lorsque l'on se place à proximité des dipôles, les lignes de champ deviennent fondamentalement différentes.

Pour le dipôle électrostatique (fig. 37), elles vont de la charge négative vers la charge positive, alors que pour le dipôle magnétique (fig. 38), elles passent dans la spire sans jamais toucher le courant.

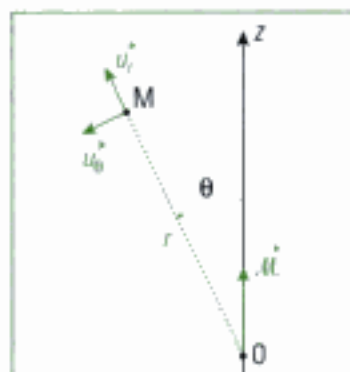


Fig. 34 - Pour exprimer  $\vec{B}$  en coordonnées sphériques.

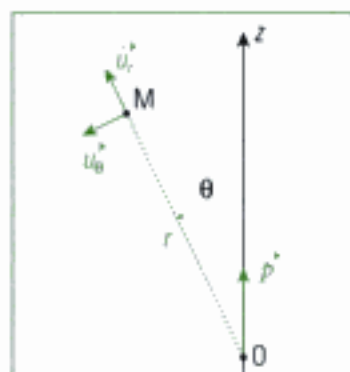


Fig. 35 - Pour exprimer  $\vec{E}$  en coordonnées sphériques.

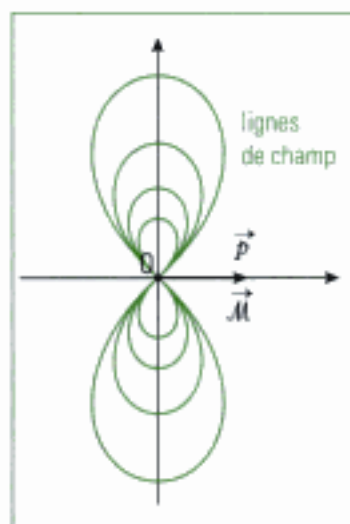


Fig. 36 - Carte des champs magnétique et électrostatique.

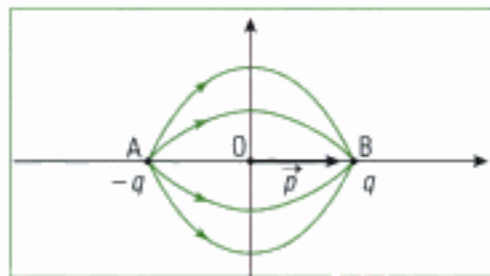


Fig. 37 - Lignes de champ à proximité du dipôle électrostatique.

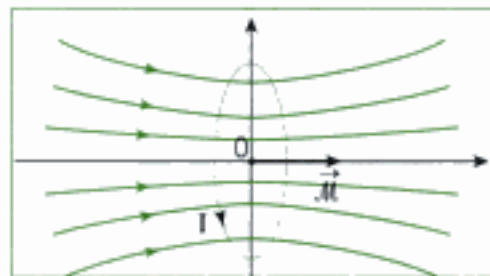


Fig. 38 - Lignes de champ à proximité du dipôle magnétique.



1. Cette hypothèse n'en est qu'une en apparence, puisque l'approximation dipolaire suppose que sur l'étendue du dipôle, le champ  $\vec{B}$  ne varie pas.

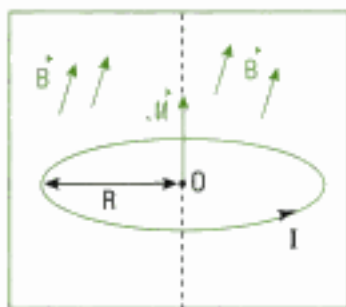


Fig. 39 - Dipôle magnétique constituée par une spire circulaire parcourue par un courant d'intensité  $I$ .

2. Il ne se déplace donc pas à l'échelle macroscopique.

3. On rappelle la formule du double produit vectoriel :

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$$

### H.3.6. Actions subies par un dipôle magnétique

Un dipôle magnétique peut être modélisé par une spire circulaire de petite taille parcourue par un courant.

Pour comprendre les actions subies par un dipôle magnétique, on définit les forces agissant sur les courants, puis on les applique au dispositif constitué par le dipôle magnétique.

#### H.3.6.1. Force subie par un dipôle magnétique

On considère un dipôle magnétique plongé dans un champ magnétique  $\vec{B}$  uniforme<sup>1</sup> et on le modélise par une spire circulaire de rayon  $R$  et parcourue par un courant d'intensité  $I$  (fig. 39).

On calcule donc la force de Laplace subie par ce dipôle :

$$\vec{F} = \oint d\vec{F} = \oint I d\vec{l} \wedge \vec{B} = I \left( \oint d\vec{l} \right) \wedge \vec{B} = \vec{0}.$$

En effet, l'intensité  $I$  et le champ magnétique  $\vec{B}$  étant uniformes, ils n'interviennent pas dans le calcul de l'intégrale et, de plus, la somme vectorielle des éléments de longueur est nulle car le circuit est fermé.

#### Loi 7

Un dipôle magnétique plongé dans un champ magnétique uniforme subit une force de Laplace nulle.

La conséquence physique de cette loi est que le champ magnétique extérieur  $\vec{B}$  ne provoque aucun mouvement de translation du dipôle magnétique<sup>2</sup>.

#### H.3.6.2. Moment subi par un dipôle magnétique

Même si la force exercée est nulle, son moment  $\vec{M}$  ne l'est peut-être pas. Calculons le au point  $O$ , centre de la spire.

On ajoute tous les moments élémentaires  $d\vec{M}$  subis par les éléments de circuit de centre  $P$  soumis à la force de Laplace élémentaire  $d\vec{F}$  :

$$\vec{M} = \oint_{\Gamma} \vec{OP} \wedge d\vec{F} = \oint_{\Gamma} \vec{OP} \wedge (I d\vec{l} \wedge \vec{B}) = I \oint_{\Gamma} (\vec{OP} \cdot \vec{B}) d\vec{l} - (\vec{OP} \cdot d\vec{l}) \vec{B}.$$

On se place en coordonnées cylindriques et l'on prend le centre de la spire comme origine  $O$  et l'axe de révolution de la spire comme axe  $(Ox)$ . Alors :

$$\vec{OP} = R\vec{u}_r, d\vec{l} = R d\theta \vec{u}_\theta, \text{ donc } \vec{OP} \cdot d\vec{l} = 0.$$

Le moment devient :

$$\vec{M} = I \oint_{\Gamma} (\vec{OP} \cdot \vec{B}) d\vec{l}.$$

Les vecteurs  $\vec{u}_r$  et  $\vec{u}_\theta$  variant lors de l'intégration sur les points  $P$  de  $\Gamma$ , il convient de les projeter sur une base fixe, la base cartésienne, pour ne pas avoir à intégrer des vecteurs unitaires :

$$\vec{OP} = R \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{B} = \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix}, d\vec{l} = R d\theta \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} \text{ dans cette base.}$$

$$\text{Ainsi, } (\vec{OP} \cdot \vec{B}) d\vec{l} = R^2 d\theta (\cos\theta B_x + \sin\theta B_y) (-\sin\theta \vec{u}_x + \cos\theta \vec{u}_y).$$

Le moment peut maintenant être calculé en intégrant sur  $\theta$  entre 0 et  $2\pi$  :

$$\vec{M} = I \int_0^{2\pi} R^2 d\theta (\cos\theta B_x + \sin\theta B_y) (-\sin\theta \vec{u}_x + \cos\theta \vec{u}_y),$$

et sachant que  $\int_{\theta=0}^{2\pi} \sin\theta \cos\theta d\theta = 0$ , il vient :

$$\vec{\mathcal{M}} = I R^2 \left( \underbrace{B_x \vec{u}_y}_{\pi} \int_{\theta=0}^{2\pi} \cos^2\theta d\theta - \underbrace{B_y \vec{u}_x}_{\pi} \int_{\theta=0}^{2\pi} \sin^2\theta d\theta \right),$$

soit  $\vec{\mathcal{M}} = I \pi R^2 (B_x \vec{u}_y - B_y \vec{u}_x) = I \pi R^2 \vec{u}_z \wedge (B_x \vec{u}_x + B_y \vec{u}_y + B_z \vec{u}_z)$  et donc :

$$\vec{\mathcal{M}} = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B}.$$

#### Loi 8

Un dipôle magnétique de moment magnétique  $\vec{\mathcal{M}}$  et plongé dans un champ magnétique  $\vec{B}$  subit un moment :

$$\vec{\mathcal{M}} = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B}.$$

On parle de couple lorsque la force résultante est nulle, alors que le moment résultant ne l'est pas. Le dipôle ne se déplace pas dans le champ magnétique extérieur  $\vec{B}$ , mais tend à tourner pour orienter son moment magnétique  $\vec{\mathcal{M}}$  dans le sens du champ magnétique extérieur  $\vec{B}$ .

### H.6.3. Énergie potentielle magnétique

De manière analogue au dipôle électrostatique, on montre que l'on peut définir une énergie potentielle magnétique  $E_p$  à tout moment magnétique  $\vec{\mathcal{M}}$  plongé dans un champ magnétique extérieur  $\vec{B}$ .

#### Loi 9

Il existe une énergie potentielle magnétique d'interaction entre un moment magnétique  $\vec{\mathcal{M}}$  et le champ magnétique extérieur  $\vec{B}$  dans lequel ce moment est plongé :

$$E_p = - \vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{B}.$$

Si le champ magnétique dans lequel est plongé le dipôle n'est pas uniforme, alors le dipôle subit la force  $\vec{F}$  telle que :

$$\vec{F} = - \vec{\text{grad}} E_p = \vec{\text{grad}} (\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{B}).$$

## I. Approximation des Régimes Quasi-Stationnaires (ARQS)

### I.1. Définition

Le champ électromagnétique mesuré en un point M à une date t a été créé par ses sources, les charges et les courants, présents en des points P généralement relativement lointains du point M d'observation.

Le champ électromagnétique est créé en P et se propage jusqu'au point M où il est mesuré<sup>2</sup>.

1. On remarque cet effet de rotation lorsque l'on place de la limaille de fer dans le champ magnétique dont on veut visualiser les lignes de champ. Les grains de limaille possèdent un moment magnétique et s'orientent dans la direction du champ extérieur étudié.

2. Cela peut être aussi au point où l'on en mesure les effets.

1. Le chapitre 5 en apporte la démonstration.

La propagation du champ électromagnétique s'effectue à la vitesse  $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  dans le vide ou dans un conducteur. Le champ électromagnétique a besoin de la durée  $t_{PM} = \frac{PM}{c}$ , pour aller depuis son lieu de création P jusqu'au point M où on mesure son action. Les variations des sources du champ au point P ne sont donc pas ressenties immédiatement au point M, mais seulement après la durée  $t_{PM} = \frac{PM}{c}$ .

#### Définition 15

On appelle **approximation des états quasi-stationnaires** (ou **ARQS**) l'étude de l'électromagnétisme dans la limite où les temps de propagation peuvent être négligés.

Soit T une durée caractéristique des variations temporelles des densités de charges ou de courants (T est par exemple la période si les densités sont sinusoïdales), et en conséquence la période du champ électromagnétique. Soit D une distance correspondant à l'extension géométrique ou géographique typique du dispositif.

L'approximation des états quasi-stationnaires est donc valable lorsque :

$$\frac{PM}{c} \ll T, \text{ soit } D \ll cT.$$

On constate alors que le champ électromagnétique s'établit instantanément à notre échelle de mesure du temps.

En électricité, le circuit d'une habitation a une longueur dont l'ordre de grandeur est  $D = 30 \text{ m}$ . L'approximation des états quasi-stationnaires est valable si  $T \gg \frac{D}{c}$ , soit  $T \gg 10^{-7} \text{ s}$ , ou pour une fréquence correspondante  $f = \frac{1}{T} \ll 10^7 \text{ Hz} = 10 \text{ MHz}$ . Cela est toujours le cas pour les circuits électriques classiques<sup>1</sup>.

## I.2. Équations locales dans l'A.R.Q.S

On se place dans le vide, ou bien, lorsqu'il y a des charges ou des courants, dans un milieu matériel dont les permittivité et perméabilité absolues sont celles du vide, respectivement  $\epsilon_0$  et  $\mu_0$ .

Soit D la distance caractéristique des variations du champ électromagnétique sur l'étendue du dispositif, et T une durée caractéristique de ses variations temporelles.

La dérivée du champ par rapport au temps revient, en ordre de grandeur, à diviser par sa durée caractéristique T de variation.

Si, par exemple, le champ électrique s'écrit  $\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kx + \varphi) \vec{u}$ , et a pour amplitude  $E_0$ , alors  $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\omega E_0 \sin(\omega t - kx + \varphi) \vec{u}$  a pour amplitude  $\omega E_0 = 2\pi \frac{E_0}{T}$ , soit  $\frac{E_0}{T}$  en ordre de grandeur<sup>1</sup>.

De même, une dérivation par rapport aux coordonnées d'espace revient à diviser par la distance D caractéristique de l'étendue du dispositif sur lequel le champ varie.

2. Aucun résultat précis n'est recherché, mais seulement une valeur correcte dans des variations d'un facteur 10 (grande tolérance).

3. Seuls les circuits hyperfréquences ne vérifient pas l'approximation des états quasi-stationnaires. Les antennes paraboliques, par exemple, fonctionnent avec des fréquences de quelques GHz et ne vérifient pas l'approximation des états quasi-stationnaires, les antennes de réception des ondes radio « FM » non plus, la fréquence étant de l'ordre de 100 MHz.

4. Aucun résultat précis n'est recherché, mais seulement une valeur correcte dans des variations d'un facteur 10 (grande tolérance).



### I.2.1. Équations de Maxwell

La démarche précédente nous permet d'évaluer l'ordre de grandeur de chaque terme des équations de Maxwell.

L'équation de Maxwell-Flux n'apporte rien.

L'équation de Maxwell-Gauss ( $\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ ) donne :

$$\frac{E}{D} = \frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

Elle ne donne que le lien entre l'amplitude du champ électrique et celle de ses sources.

L'équation de Maxwell-Faraday ( $\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ ) donne :

$$\frac{E}{D} = \frac{B}{T}.$$

Cette relation indique ainsi le rapport des amplitudes des champs.

L'équation de Maxwell-Ampère s'écrit :

$$\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

Calculons les deux ordres de grandeur :  $\|\vec{\text{rot}} \vec{B}\| = \frac{B}{D}$  et  $\left\| \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right\| = \frac{1}{c^2} \frac{E}{T}$ .

Le rapport de ces deux termes devient :

$$\frac{\left\| \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right\|}{\|\vec{\text{rot}} \vec{B}\|} = \frac{\frac{1}{c^2} \frac{E}{T}}{\frac{B}{D}} = \frac{D^2}{c^2 T^2} \ll 1, \text{ car } D \ll cT.$$

Cela signifie que l'on peut négliger les courants de déplacement dans l'approximation des états quasi-stationnaires.

#### Propriété 24

Dans l'approximation des états quasi-stationnaires, les équations de Maxwell s'écrivent<sup>1</sup> :

Maxwell-flux  $\text{div} \vec{B} = 0$

Maxwell-Gauss  $\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$

Maxwell-Faraday  $\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

Maxwell-Ampère  $\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$

### I.2.2. Équation de conservation de la charge

Si on prend la divergence de l'équation de Maxwell-Ampère dans l'approximation des états quasi-stationnaires<sup>2</sup>, on obtient :

#### Propriété 25

Dans l'ARQS, l'équation de conservation de la charge s'écrit :

$$\text{div} \vec{j} = 0.$$

1. On remarque la présence d'un terme de dérivée par rapport au temps : l'ARQS correspond aux régimes lentement variables dans le temps, et certainement pas aux régimes statiques.

2. On rappelle que  $\text{div}(\vec{\text{rot}}) = 0$ .

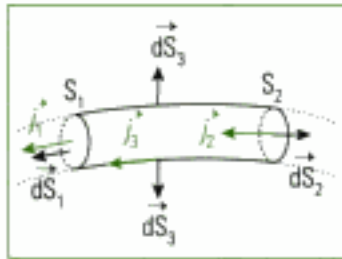


Fig. 40 - Fil électrique.

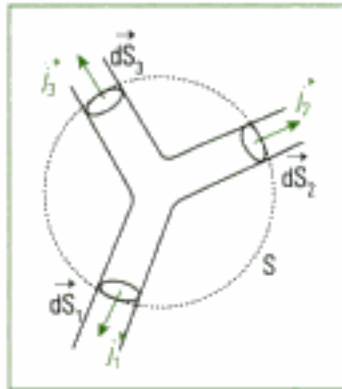


Fig. 41 - Nœud de courant.

L'équation locale de conservation de la charge n'est compatible avec les équations de Maxwell dans l'approximation des états quasi-stationnaires que si  $\frac{\partial \rho}{\partial t}$  peut être négligé. La densité de courant a une divergence nulle, ce qui la rend à flux conservatif. Ainsi, **chaque portion de fil électrique est un tube de courant, l'intensité du courant à travers chacune des deux sections étant la même**. On étudie ainsi une surface cylindrique fermée  $S$  dont la hauteur est formée par la paroi d'un fil électrique et les bases par des sections  $S_1$  et  $S_2$  du fil (fig. 40). On a alors :

$$\oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_1} \vec{j}_1 \cdot d\vec{S}_1 + \iint_{S_2} \vec{j}_2 \cdot d\vec{S}_2 + \iint_{S_3} \vec{j}_3 \cdot d\vec{S}_3 = I_1 - I_2,$$

$$\text{et : } \oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = \iiint_\tau \text{div } \vec{j} d\tau = 0.$$

Il vient donc :  $I_1 = I_2$ .

On démontre de la même manière **la loi des mailles : la somme des intensités partant d'un nœud** (que l'on a entouré d'une surface fermée  $S$ ) **est nulle**. Par le même raisonnement que précédemment (fig. 24), on obtient :

$$\oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_1} \vec{j}_1 \cdot d\vec{S}_1 + \iint_{S_2} \vec{j}_2 \cdot d\vec{S}_2 + \iint_{S_3} \vec{j}_3 \cdot d\vec{S}_3 = I_1 + I_2 + I_3,$$

$$\text{et : } \oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = \iiint_\tau \text{div } \vec{j} d\tau = 0.$$

Il vient donc :  $I_1 + I_2 + I_3 = 0$ .

## J. Étude énergétique

### J.1. Puissance fournie aux charges mobiles

Soit une charge  $q$  possédant la vitesse  $\vec{v}$  et plongée dans le champ électromagnétique. Cette charge subit la force de Lorentz :

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}).$$

La puissance de la force de Lorentz vaut donc :

$$p = \vec{F} \cdot \vec{v} = q\vec{E} \cdot \vec{v}.$$

Considérons maintenant une distribution de courant volumique, avec une densité  $\rho'$  de charges mobiles, dont  $n$  est le nombre de porteurs de charge par unité de volume. Le nombre  $dN$  de porteurs de charges mobiles de valeur  $q$  compris dans un volume  $d\tau$  vaut  $dN = nd\tau$ . La charge mobile de ce volume s'écrit alors :

$$dq = qdN = nqd\tau = \rho'd\tau.$$

La puissance  $dp$  cédée aux charges mobiles du volume  $d\tau$  vaut alors :

$$dp = dq\vec{E} \cdot \vec{v} = \rho'\vec{v} \cdot \vec{E}d\tau = \vec{j} \cdot \vec{E}d\tau$$

#### Définition 16

La **puissance volumique**  $\frac{dp}{d\tau}$  de la force de Lorentz cédée à la matière par l'onde électromagnétique vaut :

$$\frac{dp}{d\tau} = \vec{j} \cdot \vec{E}.$$

Cette formule s'applique aux milieux conducteurs. Dans ce cas, comme la loi d'Ohm donne  $\vec{j} = \gamma \vec{E}$ , il vient :

$$\frac{dp}{d\tau} = \vec{j} \cdot \vec{E} = \gamma E^2 \geq 0.$$

Mais cette puissance ne peut être emmagasinée dans les conducteurs qui la restituent à l'extérieur sous forme d'**effet Joule** (chaleur que l'on peut modéliser par une perte d'énergie due aux chocs entre les diverses charges mobiles).

## J.2. Grandeurs énergétiques

### Définition 17

Le **vecteur de Poynting** correspond à la densité du flux d'énergie électromagnétique et est défini par :

$$\vec{R} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}.$$

$\vec{R}$  est homogène à une puissance surfacique ; son unité SI est le  $W \cdot m^{-2}$ .

### Théorème 5

#### Signification du vecteur de Poynting

Le flux sortant du vecteur de Poynting  $\vec{R}$  à travers une surface  $S$  est égal au débit d'énergie électromagnétique à travers cette surface.

### Définition 18

Soit  $\frac{dW}{d\tau}$  la densité volumique d'énergie électromagnétique du champ.

Elle est défini par :

$$\frac{dW}{d\tau} = \epsilon_0 \frac{E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}.$$

Son unité est le  $J \cdot m^{-3}$ .

## J.3. Équation locale de Poynting

Nous nous plaçons en un point  $M$  quelconque du vide, où le champ électromagnétique  $(\vec{E}, \vec{B})$  est créé par les densités de charges fixes et mobiles. Exprimons la puissance volumique de la force de Lorentz en utilisant l'équation de Maxwell-Ampère ( $\vec{j} = -\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{1}{\mu_0} \text{rot} \vec{B}$ ) :

$$\frac{dp}{d\tau} = \vec{j} \cdot \vec{E} = -\epsilon_0 \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \cdot \text{rot} \vec{B}.$$

On rappelle que :  $\text{div}(\vec{E} \wedge \vec{B}) = \vec{B} \cdot \text{rot} \vec{E} - \vec{E} \cdot \text{rot} \vec{B}$  <sup>2</sup>, d'où il vient :

$$\vec{E} \cdot \text{rot} \vec{B} = \vec{B} \cdot \text{rot} \vec{E} - \text{div}(\vec{E} \wedge \vec{B}).$$

L'expression de la puissance volumique cédée à la matière prend alors la forme :

$$\frac{dp}{d\tau} = \vec{j} \cdot \vec{E} = -\epsilon_0 \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{1}{\mu_0} (\vec{B} \cdot \text{rot} \vec{E} - \text{div}(\vec{E} \wedge \vec{B})).$$

En utilisant l'équation de Maxwell-Faraday  $\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ , il vient :

$$\vec{j} \cdot \vec{E} = -\epsilon_0 \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{1}{\mu_0} \left( -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{B} - \text{div}(\vec{E} \wedge \vec{B}) \right).$$

1.  $\frac{dW}{d\tau}$  est une notation explicite d'énergie volumique, puisque  $dW$  représente l'énergie présente dans le volume  $d\tau$ , et leur rapport  $\frac{dW}{d\tau}$  est bien une énergie volumique.

2. C'est une formule de dérivation d'un produit, voir le formulaire du chapitre 1.



En remarquant que  $\vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{E^2}{2} \right)$  et  $\vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{B^2}{2} \right)$ , on obtient finalement :

**Propriété 26**

**Équation locale de Poynting**

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{dW}{d\tau} \right) + \vec{j} \cdot \vec{E} + \text{div} \vec{R} = 0.$$

Cette équation traduit localement le bilan énergétique dans le vide.

## J.4. Bilan global et interprétation

Pour dégager la signification concrète de ces quantités présentes dans l'équation locale, intégrons chacun des membres de cette équation sur un volume  $\tau$  délimité par une surface fermée  $S$  (fig. 42)<sup>1</sup> :

$$\iiint_{\tau} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{dW}{d\tau} \right) d\tau = - \iiint_{\tau} \vec{j} \cdot \vec{E} d\tau - \iiint_{\tau} \text{div} \vec{R} d\tau, \text{ soit :}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\tau} \frac{dW}{d\tau} d\tau = - \iiint_{\tau} \vec{j} \cdot \vec{E} d\tau - \oint_S \vec{R} \cdot \vec{n} dS, \vec{n} \text{ étant la normale sortante à la surface fermée } S.$$

Or  $\iiint_{\tau} \frac{dW}{d\tau} d\tau = \iiint_{\tau} dW = W$ , énergie électromagnétique contenue dans le volume  $\tau$ . L'équation bilan devient alors :

**Propriété 27**

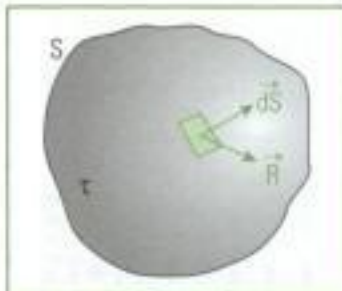
**Équation de conservation de l'énergie au niveau global**

Soit un volume  $\tau$  contenant une énergie électromagnétique  $W$  et délimité par une surface fermée  $S$ . On a :

$$\underbrace{\frac{\partial W}{\partial t}}_{\text{variation de l'énergie}} = - \underbrace{\iiint_{\tau} \vec{j} \cdot \vec{E} d\tau}_{\text{perte par « effet Joule » (fournie à la matière)}} - \underbrace{\oint_S \vec{R} \cdot \vec{n} dS}_{\text{perte d'énergie par rayonnement}}$$

**Propriété 28**

Le module  $R = \|\vec{R}\|$  du vecteur de Poynting  $\vec{R} = R\vec{u}$  représente la puissance surfacique transportée<sup>3</sup> par le champ dans la direction de son vecteur unitaire  $\vec{u}$ .



**Fig. 42** - Volume  $\tau$  délimité par la surface fermée  $S$  et contenant l'énergie électromagnétique  $W$ .

1. Lorsque l'opérateur divergence ou des grandeurs volumiques interviennent dans une équation, on a intérêt à intégrer cette équation sur un volume pour appliquer la formule d'Ostrogradsky et interpréter physiquement le bilan sur la grandeur considérée.

2. La notation explicite de l'énergie volumique permet de mieux comprendre que  $\frac{dW}{d\tau} d\tau$  est l'énergie  $dW$  présente dans l'élément de volume  $d\tau$ .

3. Transportée par rayonnement, ou rayonnée.

# L'essentiel

## ✓ Sources du champ électromagnétique

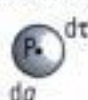
- La **densité volumique de charges** en un point P a pour expression :

$$\rho(P) = \frac{dq}{d\tau},$$

où  $dq$  est la charge du volume élémentaire  $d\tau$  autour de P.

Elle s'exprime en  $C \cdot m^{-3}$ . La charge totale d'un volume  $\tau$  s'écrit alors :

$$q = \iiint_{\tau} dq = \iiint_{\tau} \rho(P) d\tau.$$



- La **densité surfacique de charges** en un point P appartenant à une surface S a pour expression :

$$\sigma(P) = \frac{dq}{dS},$$

où  $dq$  est la charge de la surface élémentaire  $dS$  autour de P.

Elle s'exprime en  $C \cdot m^{-2}$ . La charge totale d'une surface S s'écrit alors :

$$q = \iint_S dq = \iint_{P \in S} \sigma(P) dS.$$



- La **densité de courant volumique**  $\vec{j}$  est définie par :

$$\vec{j} = \rho_m \vec{v},$$

où  $\rho_m$  est la densité volumique de charges mobiles de vitesse  $\vec{v}$ .

Elle s'exprime en  $A \cdot m^{-2}$ . L'intensité totale I traversant une section S de conducteur s'écrit alors :

$$I = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}.$$



- La **densité de courant surfacique**  $\vec{j}_s$  est définie par :

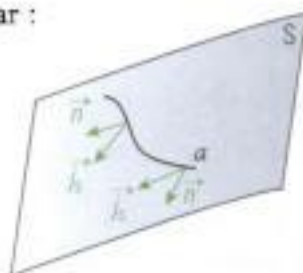
$$\vec{j}_s = \sigma_m \vec{v},$$

où  $\sigma_m$  est la densité volumique de charges mobiles sur une surface S de vitesse  $\vec{v}$ .

Elle s'exprime en  $A \cdot m^{-1}$ . L'intensité totale I traversant une ligne  $a$  contenue dans la surface conductrice S s'écrit alors :

$$I = \int_a di = \int_a \vec{j}_s \cdot \vec{n} da,$$

avec  $\vec{n}$  vecteur unitaire tangent à la surface S et orthogonal à  $a$  en tout point de  $a$ .



## ✓ Étude des potentiels

- Le **potentiel vecteur**  $\vec{A}$  du champ magnétique  $\vec{B}$  a pour expression :

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A}.$$

- Le **potentiel scalaire** V du champ électrique  $\vec{E}$  a pour expression :

$$\vec{E} = -\text{grad } V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}.$$



## ✓ Équations locales du champ électromagnétique

- Les équations de Maxwell dans le vide s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{div} \vec{B} = 0 & \text{Équation de Maxwell-flux} \\ \text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} & \text{Équation de Maxwell-Gauss} \\ \vec{\text{rot}} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \text{Équation de Maxwell-Faraday} \\ \vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} & \text{Équation de Maxwell-Ampère} \end{array} \right.$$

- L'équation locale de conservation de la charge est la suivante :

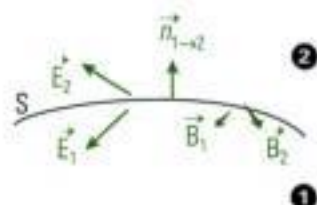
$$\text{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$$

- En régime statique (indépendant du temps), les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  sont indépendants l'un de l'autre ; en régime variable, ils sont couplés.
- En statique, les potentiels  $V$  et  $\vec{A}$  vérifient les **équations de Poisson** respectives :

$$\Delta V + \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0 \quad \text{et} \quad \Delta \vec{A} + \mu_0 \vec{j} = \vec{0}.$$

- ✓ **Conditions de passage du champ électromagnétique à la traversée d'une surface  $S$  sur laquelle se trouvent des densités  $\sigma$  de charges et  $\vec{j}_s$  de courant**

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}_{1 \rightarrow 2} \\ \vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n}_{1 \rightarrow 2} \end{array} \right.$$



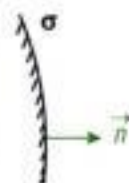
## ✓ Conducteur parfait en équilibre

- À l'intérieur d'un **conducteur parfait en équilibre**, le champ électrique et la densité volumique de charges sont nuls ( $\vec{E} = \vec{0}$  et  $\rho = 0$ ), et le potentiel électrique est constant ( $V = \text{constante}$ ). Le conducteur n'est chargé qu'en surface.

- **Théorème de Coulomb** : au voisinage du conducteur, le champ électrique vaut :

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n},$$

où  $\sigma$  et  $\vec{n}$  sont respectivement la densité de charges à la surface du conducteur et la normale sortante du conducteur.

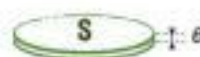


## ✓ Condensateur

- Un **condensateur** est un système de deux conducteurs A et B en influence totale : les charges sont opposées sur les armatures en regard.
- La **charge** du condensateur vaut :  $Q = Q_A = -Q_B$  si  $Q_A > 0$  est la charge portée par le conducteur A.
- La **capacité** du condensateur est :

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{Q_A}{V_A - V_B}, \text{ si } Q_A > 0.$$

Pour un **condensateur plan**, la capacité vaut :  $C = \frac{\epsilon_0 S}{e}$ .





### ✓ Force de Laplace

- La **force de Laplace** subie par un circuit  $\Gamma$  parcouru par un courant filiforme  $I$  admet la résultante :

$$\vec{F}_L = \int_{\Gamma} Id\vec{l} \wedge \vec{B},$$

et le moment résultant en  $A$  :

$$\vec{M}_A = \int_{P \in \Gamma} \vec{AP} \wedge (Id\vec{l} \wedge \vec{B}).$$

- La **force de Laplace** subie par un système  $\tau$  parcouru par un courant volumique  $\vec{j}$  admet la résultante :

$$\vec{F}_L = \iiint_{\tau} \vec{j} \wedge \vec{B} d\tau,$$

et le moment résultant en  $A$  :

$$\vec{M}_A = \iiint_{P \in \tau} \vec{AP} \wedge (\vec{j} \wedge \vec{B}) d\tau.$$

### ✓ Moment magnétique et dipôle magnétique

- Le moment magnétique  $\vec{M}$  d'un circuit filiforme est défini par :

$$\vec{M} = I \vec{S} \quad \left| \begin{array}{l} \vec{M} \text{ moment magnétique (A} \cdot \text{m}^2) \\ I \text{ intensité (A)} \\ \vec{S} \text{ surface (m}^2) \end{array} \right.$$

où  $\vec{S}$  est le vecteur surface de ce circuit filiforme fermé et  $I$  l'intensité du courant qui le traverse.

- On parle de dipôle magnétique actif si l'étendue du moment magnétique est très petite devant la distance depuis laquelle on étudie le champ magnétique qu'il crée.
- On parle de dipôle magnétique passif si l'étendue du moment magnétique est très petite devant la distance caractéristique de variation du champ magnétique extérieur dont il subit l'action.

### ✓ Approximation des états quasi-stationnaires (ARQS)

- Les temps de propagation peuvent être négligés ; le champ s'établit instantanément.
- **Condition de validité de l'ARQS** : si  $D$  et  $T$  sont respectivement une distance et un temps caractéristiques du système, alors on doit avoir en tout point de l'espace :

$$D \ll cT.$$

### ✓ Étude énergétique

- $\frac{dW}{d\tau} = \epsilon_0 \frac{E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}$  est la densité volumique d'énergie électromagnétique du champ.

- $\vec{R} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$  est le vecteur de Poynting et représente la puissance (surfactive) transportée ou rayonnée par le champ électromagnétique. Le flux de  $\vec{R}$  à travers une surface est la puissance électromagnétique qui la traverse.

- $\vec{j} \cdot \vec{E}$  est la puissance volumique cédée aux charges mobiles (« effet Joule »).
- L'**équation locale de Poynting** est la suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{dW}{d\tau} \right) + \vec{j} \cdot \vec{E} + \text{div} \vec{R} = 0.$$

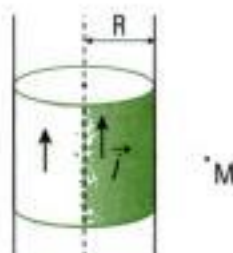
Elle correspond à un bilan d'énergie.

# Mise en œuvre

## Méthode n° 1

### Comment trouver l'équation aux dérivées partielles satisfaite par un champ vectoriel ?

On cherche l'équation aux dérivées partielles satisfaite dans l'ARQS par le champ électrique  $\vec{E}$  dans un conducteur cylindrique infiniment long parcouru par une densité de courant volumique  $\vec{j}$  non uniforme, fonction du temps et colinéaire à son axe.



#### → Savoir faire

- ❶ Si le problème est indépendant du temps ou considéré dans l'ARQS, alors une équation de Maxwell suffit souvent. C'est celle qui relie le champ vectoriel à ses sources. Si tel n'est pas le cas, alors passer à ❷.
- ❷ Le champ vectoriel reste donc couplé avec l'autre champ, une combinaison des équations de Maxwell est alors nécessaire pour trouver l'équation locale (du second ordre dans ce cas) satisfaite par le champ recherché. Selon la position des sources, elle peut s'écrire différemment dans plusieurs parties de l'espace.

Pour obtenir cette équation, on utilise généralement la formule d'analyse vectorielle :

$$\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}} \vec{W}) = \vec{\text{grad}}(\text{div} \vec{W}) - \Delta \vec{W},$$

où  $\vec{W}$  est le champ vectoriel ( $\vec{B}$ ,  $\vec{j}$  ou  $\vec{E}$ ). On utilise ensuite les équations de Maxwell pour obtenir l'équation satisfaite par le champ voulu, dans laquelle figure son laplacien.

- ❸ Effectuer les considérations de symétrie et d'invariances pour déterminer la direction du champ et les variables dont il dépend. Choisir le système de coordonnées le plus adapté aux conclusions de ces considérations.
- ❹ Écrire l'expression du laplacien ou autres opérateurs dans le système de coordonnées choisi pour obtenir l'équation aux dérivées partielles recherchée.

#### → Application

❶ Il n'y a pas de charge fixe. La source de champ électrique  $\vec{E}$  est donc éventuellement constituée par les variations temporelles du champ magnétique. La densité de courant volumique  $\vec{j}$  est source de champ magnétique : il faut donc commencer par l'équation de Maxwell-Ampère :  $\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$  dans l'ARQS. On sait que la densité de courant volumique dépend du temps, donc le champ magnétique  $\vec{B}$  aussi, et il faut utiliser l'équation de Maxwell-Faraday pour avoir le lien entre les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  :  $\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ . **Les champs sont donc couplés.**

❷ On utilise  $\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}} \vec{E}) = \vec{\text{grad}}(\text{div} \vec{E}) - \Delta \vec{E}$ , avec les équations locales supplémentaires :  $\text{div} \vec{E} = 0$  (Maxwell-Gauss) et  $\vec{j} = \gamma \vec{E}$  (loi d'Ohm).

La formule d'analyse vectorielle devient alors :

$$\vec{\text{rot}}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = \vec{\text{grad}}(0) - \Delta \vec{E}, \text{ soit } -\Delta \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{\text{rot}} \vec{B} = -\mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \text{ et enfin } \Delta \vec{E} - \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{0}.$$



## ③ Invariances

La distribution est invariante dans toute rotation autour de son axe, ainsi que dans toute translation le long de son axe. Une invariance autour d'un axe étant mise en évidence, il est clair que le système de coordonnées cylindriques est adapté. On en déduit  $\vec{E} = \vec{E}(r, t)$ .

## Symétries

Soit H le projeté orthogonal de M sur l'axe du cylindre. Les plans  $\pi_1$  (plan contenant l'axe du cylindre et la droite HM) est plan de symétrie pour la distribution, donc  $\vec{E}$  est dans ce plan, et  $\pi_2$  (plan contenant la droite HM et perpendiculaire à l'axe du cylindre) est plan d'antisymétrie pour les sources, donc  $\vec{E}$  est orthogonal à ce plan :  $\vec{E}$  est dirigé selon le vecteur unitaire  $\vec{u}_z$  de la base cylindrique.

On remarque *a posteriori* que le plan de symétrie ne sert à rien ici, et on rappelle que pour connaître la direction du champ électrique, il suffit d'un plan d'antisymétrie ou de deux plans de symétrie. Ces plans doivent obligatoirement contenir le point M où l'on cherche la direction du champ.

La forme de la distribution nous invite à choisir le système de coordonnées cylindriques, car les plans de symétrie ou d'antisymétrie sont facilement identifiables dans ce système :  $\pi_1 = (M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$  et  $\pi_2 = (M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ . On a donc trouvé  $\vec{E}(M, t) = E(r, \theta, z, t)\vec{u}_z$ , puis finalement :

$$\vec{E}(M, t) = E(r, t)\vec{u}_z.$$

④ On a ici  $\Delta\vec{E} = -\text{rot}(\text{rot } \vec{E})$ . Le rotationnel est donc bien simplifié, puisque :  $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial E_z}{\partial r}\vec{u}_\theta$  et  $\text{rot}(\text{rot } \vec{E}) = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial E_z}{\partial r}\right)\vec{u}_z$ . Avec  $\Delta\vec{E} - \mu_0\gamma\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{0}$  et en projetant sur l'axe  $z$  ( $E = E_z$ ), on obtient finalement :

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial E}{\partial r}\right) - \mu_0\gamma\frac{\partial E}{\partial t} = 0.$$

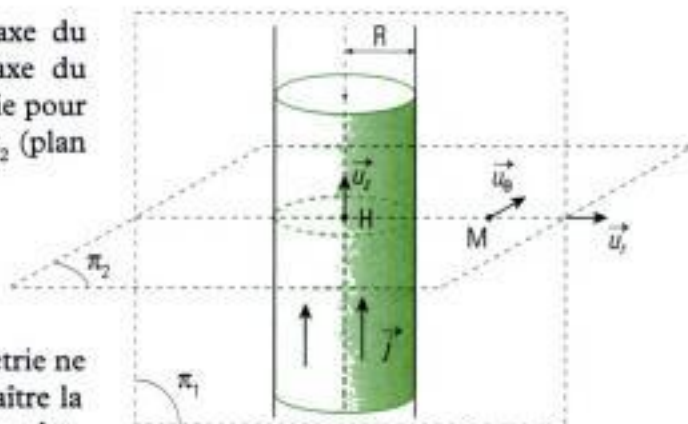
## Méthode n° 2

### Comment déterminer la capacité d'un condensateur ?

Soit un condensateur donné, dont les armatures portent une densité surfacique uniforme de charges. On cherche à exprimer la capacité de ce condensateur.

#### → Savoir faire

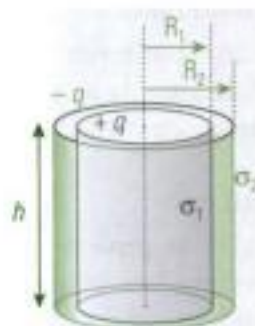
- ① Calculer le champ  $\vec{E}$  existant entre les armatures.
- ② Exprimer la charge  $q$  en fonction des densités surfaciques de charges de chacune des armatures.
- ③ Calculer la circulation du champ  $\vec{E}$  entre les armatures, depuis l'armature positive vers l'armature négative, en utilisant l'expression calculée en ①.
- ④ Égaler cette circulation avec la tension  $u$  existant entre les armatures et déduire l'expression de la capacité  $C$  du condensateur.





## → Application

On cherche l'expression de la capacité d'un condensateur cylindrique : les armatures sont des cylindres de rayons  $R_1$  et  $R_2$ , de hauteur  $h$  et portent respectivement les charges  $+q$  et  $-q$  sur leur surface avec une densité surfacique uniforme. On utilisera l'approximation du cylindre infiniment haut.



## Solution

① Pour des raisons de symétries et d'invariances, on trouve que le champ électrique  $\vec{E}$  a la forme :  $\vec{E} = E(r)\vec{u}_r$ , dans le système des coordonnées cylindriques.

Appliquons le théorème de Gauss à un cylindre  $C$  de rayon  $r \in ]R_1; R_2[$ , de hauteur  $l$  et entièrement contenu dans le cylindre de rayon  $R_2$  et de hauteur  $h$ .

On a donc :

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{S} = E(r) \cdot 2\pi r \cdot l = \frac{\sigma_1 \cdot 2\pi R_1 \cdot l}{\epsilon_0},$$

soit

$$E(r) = \frac{\sigma_1 R_1}{\epsilon_0 r}.$$

On a donc trouvé :

$$\vec{E}(R_1 < r < R_2) = \frac{\sigma_1 R_1}{\epsilon_0 r} \vec{u}_r.$$

② La charge  $q$  est uniformément répartie sur le cylindre de rayon  $R_1$  et de hauteur  $h$ . La surface du cylindre sur laquelle se trouve la charge est  $S_1 = 2\pi R_1 h$ , de sorte que la charge s'écrit :

$$q = \iint_S \sigma_1 dS = \sigma_1 \iint_S dS = \sigma_1 \times 2\pi R_1 h.$$

③ La circulation du champ  $\vec{E}$  doit être calculée de  $R_1$  à  $R_2$ . On choisit la ligne que l'on veut, puisque le champ électrostatique est à circulation conservative. Il est préférable de choisir une ligne pour laquelle  $\vec{E}$  et  $d\vec{l}$  sont colinéaires et de même sens en tout point, c'est-à-dire une ligne de champ ; une telle ligne est une droite radiale et le déplacement élémentaire s'écrit :

$$d\vec{l} = dr \vec{u}_r.$$

La circulation est :

$$\int_{R_1}^{R_2} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\sigma_1 R_1}{\epsilon_0 r} \vec{u}_r \cdot dr \vec{u}_r = \frac{\sigma_1 R_1}{\epsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = \frac{\sigma_1 R_1}{\epsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1}.$$

④ On sait que la circulation du champ s'exprime aussi en fonction du potentiel électrostatique :

$$\int_{R_1}^{R_2} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{R_1}^{R_2} -\vec{\text{grad}}V \cdot d\vec{l} = V_1 - V_2 = u.$$

Il vient donc :  $u = \frac{\sigma_1 R_1}{\epsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1}$ , avec  $q = 2\pi R_1 h \sigma_1$  soit  $\sigma_1 R_1 = \frac{q}{2\pi h}$ ,

et l'on trouve :

$$u = \frac{q}{2\pi \epsilon_0 h} \ln \frac{R_2}{R_1} = \frac{q}{C}, \text{ soit } C = \frac{2\pi \epsilon_0 h}{\ln \frac{R_2}{R_1}}.$$

## Comment déterminer un moment magnétique ?

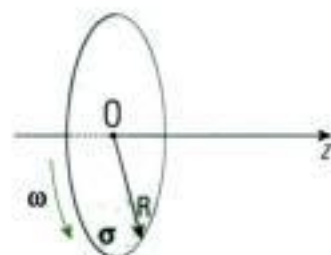
Soit un disque ayant une distribution surfacique de charge, en mouvement de rotation. On cherche à exprimer le moment magnétique de ce dispositif.

### → Savoir faire

- ❶ Choisir un système de coordonnées adapté à la géométrie du dispositif.
- ❷ À l'aide des variations infinitésimales des coordonnées, découper le dispositif en spires infinitésimales et calculer l'intensité élémentaire  $di$  qui parcourt chacune des spires.
- ❸ Exprimer le moment magnétique élémentaire de la spire précédente.
- ❹ Sommer les moments magnétiques de l'ensemble des spires constituant le dispositif.

### → Application

Exprimer le moment magnétique d'un disque de rayon  $R$ , chargé en surface avec la densité uniforme  $\sigma$ , et tournant autour de son axe de révolution ( $Oz$ ) avec la vitesse angulaire  $\omega$  constante.



### Solution

❶ Le disque et son axe ( $Oz$ ) de révolution incite à choisir sans conteste le système de coordonnées cylindriques (polaires, même, car la coordonnée  $z$  n'intervient pas au niveau du disque).

❷ On découpe le disque en spires élémentaires infiniment fines d'épaisseur  $dr$  chacune.

Cette spire est une couronne circulaire d'épaisseur  $dr$  et de rayon  $r$ .

Sa surface est :

$$dS = \int_{\theta=0}^{2\pi} dr \times r d\theta = 2\pi r dr,$$

et elle porte la charge  $dq = \sigma dS = 2\pi\sigma r dr$ .

Pour calculer l'intensité  $di$  qui parcourt cette spire, on remarque que la charge totale  $dq$  traverse une section de la spire pendant le temps d'un tour de disque, soit la durée :

$$T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

L'intensité  $di$  qui parcourt la spire est égale à la charge qui a traversé une section de la spire divisée par le temps nécessaire à cette traversée :

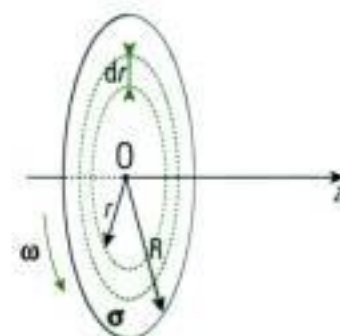
$$di = \frac{dq}{T} = \sigma\omega r dr.$$

❸ Le moment magnétique élémentaire de cette spire s'écrit  $d\vec{M} = di\vec{S}$ , soit :

$$d\vec{M} = \sigma\omega r dr \times \pi r^2 \vec{u}_z = \sigma\pi\omega r^3 dr \vec{u}_z.$$

❹ On ajoute les moments magnétiques de toutes les spires découpées dans le disque ; on intègre donc les moments magnétiques sur  $r$  de 0 à  $R$  :

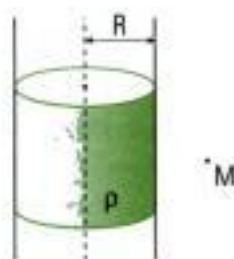
$$\vec{M} = \int d\vec{M} = \int_{r=0}^R \sigma\pi\omega r^3 dr \vec{u}_z = \frac{\sigma\pi\omega R^4}{4} \vec{u}_z.$$





## Comment déterminer un champ à partir des équations locales ?

On cherche à définir le champ électrique  $\vec{E}$  créé par une distribution volumique de charges de densité  $\rho$  uniforme répartie dans un cylindre de rayon  $R$  et de hauteur infinie en utilisant les équations locales.



### → Savoir faire

- 1 Effectuer les considérations de symétrie et d'invariances pour déterminer la direction du champ et les variables dont il dépend. Choisir le système de coordonnées le plus adapté aux conclusions de ces considérations.
- 2 Rechercher un point où le champ est connu. C'est généralement un point où il est nul, un point en lequel les symétries sont multiples. En effet, comme les équations locales font intervenir la dérivée du champ, une constante d'intégration apparaîtra et sa détermination se fera grâce à la valeur du champ au point où il est connu.
- 3 Poser ou rechercher l'équation locale satisfaite par le champ recherché (voir méthode n° 1). L'écrire dans chaque partie de l'espace. En déduire l'équation différentielle satisfaite par le champ.
- 4 Résoudre cette équation en commençant par le domaine de l'espace dans lequel se trouve le point où le champ est connu. Trouver la forme générale du champ par intégration, puis déterminer la constante d'intégration en utilisant le point où le champ est connu et/ou la condition sur le champ à l'infini.
- 5 Résoudre ensuite éventuellement l'équation locale dans les autres parties de l'espace. Trouver les constantes d'intégration en utilisant les conditions de passage du champ entre les différents domaines de l'espace.

### → Application

- 1 La distribution de charges  $\rho$  est volumique : le champ électrique est donc défini et continu en tout point de l'espace.

#### Invariances

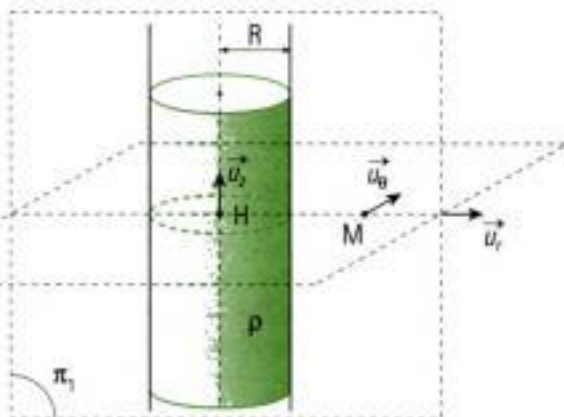
La distribution est invariante dans toute rotation autour de son axe, ainsi que dans toute translation le long de son axe. Une invariance autour d'un axe étant mise en évidence, il est clair que le système de coordonnées cylindriques est adapté. On en déduit  $E = E(r)$ .

#### Symétries

Soit  $H$  le projeté orthogonal de  $M$  sur l'axe du cylindre. Les plans  $\pi_1$  (plan contenant l'axe du cylindre et la droite  $HM$ ) et  $\pi_2$  (plan contenant la droite  $HM$  et perpendiculaire à l'axe du cylindre) sont plans de symétrie pour la distribution : le vecteur champ électrique  $\vec{E}$  est inclus dans leur intersection, la droite  $HM$ .

Donc  $\vec{E}$  est dirigé comme  $\vec{HM}$ , c'est-à-dire comme le vecteur unitaire  $\vec{u}_r$  des coordonnées cylindriques. La forme de la distribution nous invitait à choisir ce système de coordonnées, car les plans de symétrie sont facilement identifiables dans ce système :

$\pi_1 = (M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$  et  $\pi_2 = (M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ .





On a donc trouvé  $\vec{E}(M) = E(r, \theta, z)\vec{u}_r$ , puis finalement :

$$\vec{E}(M) = E(r)\vec{u}_r.$$

② Tous les plans contenant l'axe  $Oz$  sont plans de symétrie de la distribution de charges.

Donc  $\vec{E}(r=0)$  est dirigé selon l'intersection de tous ces plans, c'est-à-dire selon  $\vec{u}_z$ . Or on sait que  $\vec{E}(M) = E(r)\vec{u}_r$ , donc en un point  $M$  de l'axe  $z'z$ ,  $\vec{E}(M \in z'z) = \vec{0}$ , car  $\vec{0}$  est le seul vecteur « colinéaire » à deux vecteurs de base orthogonaux. Finalement :

$$\vec{E}(r=0) = \vec{0}.$$

③ C'est un problème d'électrostatique, les champs sont découplés et l'équation locale reliant le champ électrique et ses sources (constituées par les charges fixes) est l'équation de Maxwell-Gauss :

$$\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Pour  $r < R$ , elle s'écrit comme précédemment et pour  $r > R$ , les charges sont absentes et l'équation locale devient simplement :  $\text{div} \vec{E} = 0$ .

En coordonnées cylindriques, sachant que le champ  $\vec{E}$  est dirigé suivant  $\vec{u}_r$  et ne dépend que de  $r$ , la divergence s'écrit :  $\text{div} \vec{E} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (rE)$ .

On a donc :

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (rE) = \begin{cases} \frac{\rho}{\epsilon_0} & \text{pour } r < R \\ 0 & \text{pour } r > R \end{cases}$$

④ On sait que  $E(r=0) = 0$ , donc on commence par le domaine  $r < R$  et on résout  $\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (rE) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ , soit  $\frac{d}{dr} (rE) = \frac{\rho r}{\epsilon_0}$  qui a pour solution :

$$rE(r) = \frac{\rho r^2}{2\epsilon_0} + K, \text{ où } K \text{ est une constante.}$$

En utilisant  $E(r=0) = 0$ , l'équation précédente donne  $0 = 0 + K$ , soit  $K = 0$ . Il vient alors :

$$E(r < R) = \frac{\rho r}{2\epsilon_0}.$$

⑤ Dans le second domaine  $r > R$ , on a  $\frac{d}{dr} (rE) = 0$  qui donne :

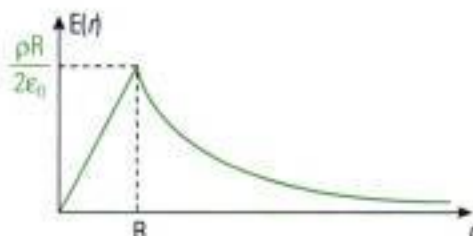
$$E(r) = \frac{K'}{r}, \text{ où } K' \text{ est une nouvelle constante.}$$

On la détermine en écrivant la condition de passage pour le champ électrique lors de la traversée de la surface  $r = R$  qui sépare les deux domaines de l'espace. On remarque que le champ électrique est normal à cette surface et qu'il reste continu car il n'y a pas de charges surfaciques :

$$E(r = R^+) = E(r = R^-),$$

$$\text{soit } E(r = R) = \frac{K'}{R} = \frac{\rho R}{2\epsilon_0} \text{ qui donne } \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0},$$

$$\text{et : } E(r > R) = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0 r}.$$



## Méthode n° 5

### Comment déterminer l'énergie d'une distribution ?

On cherche l'énergie électromagnétique créée par la distribution de courant constituée par un solénoïde circulaire de rayon  $R$ , de longueur  $L$  et comprenant  $N$  spires jointives, chacune parcourue par un courant d'intensité  $I$  constante. On suppose le champ magnétique nul lorsque l'on se trouve infiniment loin du solénoïde et que celui-ci peut être traité comme un solénoïde infiniment long doté de  $n = \frac{N}{L}$  spires par unité de longueur.



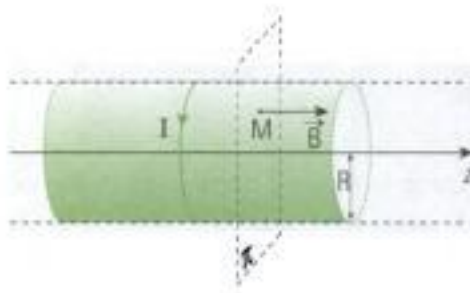
#### → Savoir faire

- ① Déterminer les deux composantes  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  du champ électromagnétique créé par cette distribution (voir méthodes n° 1 et 2).
- ② Exprimer la densité volumique d'énergie électromagnétique en fonction des champs précédemment calculés.
- ③ Intégrer cette densité volumique sur tout l'espace dans lequel elle est non nulle.

#### → Application

① C'est un problème de magnétostatique dans lequel le champ électrique est nul, puisqu'il n'y a pas de charges fixes susceptibles de pouvoir le créer :  $\vec{E} = \vec{0}$  partout.

Le plan  $\pi$  perpendiculaire à l'axe  $Oz$  de révolution du solénoïde et passant par  $M$  est plan de symétrie pour les spires du solénoïde, car il est infiniment long. Le champ magnétique  $\vec{B}$  en  $M$  est donc orthogonal à ce plan :  $\vec{B} = B\vec{u}_z$ . La forme cylindrique du dispositif nous incite à choisir le système de coordonnées cylindriques.



La distribution de courant est invariante par translation selon la direction de l'axe  $Oz$  et par rotation autour de  $Oz$ . Le fait de remarquer une invariance par translation et une par rotation impose aussi le choix des coordonnées cylindriques. L'invariance par translation montre que  $B$  ne dépend pas de  $z$  et celle par rotation que  $B$  ne dépend pas de  $\theta$ .

On a donc :

$$\vec{B} = B(r)\vec{u}_z.$$

On peut utiliser le théorème d'Ampère (voir exercice classique de magnétostatique de 1<sup>re</sup> année), mais on travaillera ici avec les équations locales (méthode n° 1).

C'est l'équation de Maxwell-Ampère qui relie le champ  $\vec{B}$  à ses sources. En statique, elle s'écrit :

$$\text{rot } \vec{B} = \vec{0}, \text{ à l'intérieur et à l'extérieur du solénoïde.}$$

Avec  $\vec{B} = B(r)\vec{u}_z$  et l'expression du rotationnel en coordonnées cylindriques, on en déduit l'équation différentielle :

$$\frac{\partial B}{\partial r} = 0, \text{ dont la solution est } B = \text{Cte.}$$



Mais on est en présence de courants superficiels : les spires sont jointives, on en compte  $n$  par unité de longueur, chacune parcourue par une intensité  $I$ . On peut donc écrire une densité surfacique de courant :

$$\vec{j}_s = nI\vec{u}_\theta, \text{ en coordonnées cylindriques.}$$

Le champ magnétique est donc discontinu à la traversée de cette surface d'équation  $r = R$ , et la valeur de ce champ uniforme dans chaque partie de l'espace n'est donc pas la même :

$$\vec{B} = \begin{cases} K\vec{u}_\theta & \text{pour } r < R \\ K'\vec{u}_\theta & \text{pour } r > R \end{cases}$$

On sait que  $B(r \rightarrow +\infty) = 0$ , ce qui donne  $K' = 0$ .

De plus lorsque  $r \rightarrow R$ , le champ magnétique est tangentiel et la condition de passage s'écrit, en notant \* 1 \* la région  $\{r < R\}$  et \* 2 \*  $\{r > R\}$  :

$$\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n}_{1 \rightarrow 2}, \text{ soit } \vec{0} - K\vec{u}_\theta = \mu_0 nI \vec{u}_\theta \wedge \vec{u}_r.$$

Cela permet de déterminer  $K$  :  $K = \mu_0 nI$ .

On trouve enfin :

$$\vec{B}(r < R) = \mu_0 nI \vec{u}_\theta ; \quad \vec{B}(r > R) = \vec{0}.$$

② La densité volumique d'énergie électromagnétique s'écrit ici :

$$\frac{dW}{d\tau} = \epsilon_0 \frac{E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{\mu_0 n^2 I^2}{2} = \frac{\mu_0 N^2 I^2}{2L^2}.$$

③ En coordonnées cylindriques, l'élément de volume est  $d\tau = r dr d\theta dz$ , il faut intégrer la densité volumique partout où le champ magnétique est non nul, c'est-à-dire sur tout le volume  $\tau$  du solénoïde :  $r$  varie de 0 à  $R$ ,  $\theta$  de 0 à  $2\pi$  et  $z$  varie de 0 à  $L$  :

$$W = \iiint_{\tau} \frac{dW}{d\tau} d\tau = \iiint_{\tau} \frac{\mu_0 N^2 I^2}{2L^2} r dr d\theta dz = \frac{\mu_0 N^2 I^2}{2L^2} \int_{r=0}^R r dr \int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta \int_{z=0}^L dz,$$

$$W = \frac{\mu_0 N^2 I^2}{2L^2} \frac{R^2}{2} 2\pi L = \frac{\mu_0 \pi N^2 I^2 R^2}{2L}.$$



# Exercices

## Niveau 1

### Ex. 1

On se place dans un conducteur de conductivité  $\gamma$ .

1) Rappeler la loi d'Ohm locale et l'équation de conservation de la charge.

2) En déduire l'équation aux dérivées partielles satisfaite par la densité volumique de charges  $\rho$  présente dans le conducteur.

3) Résoudre cette équation différentielle, en appelant  $\rho_0(M)$  la valeur de  $\rho$  en tout point  $M$  à l'origine des dates  $t = 0$ .

4) Pour un point  $M$  quelconque de l'espace, tracer l'allure de la courbe  $\rho(t)$ , décrire le phénomène qui a lieu et en donner une durée caractéristique  $\tau$ .

5) Application numérique pour un bon conducteur « classique » :  $\gamma = 10^6$  SI,  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$  SI.

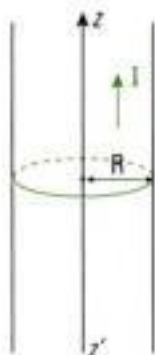
Calculer  $\tau$ . En déduire qu'un bon conducteur ne peut être chargé que sur sa surface.

### Ex. 2

Déterminer le champ magnétique  $\vec{B}$  créé en tout point de l'espace où il est défini par un fil cylindrique rectiligne d'axe  $Oz$ , de section circulaire de rayon  $R$ , parcouru par un courant volumique d'intensité totale  $I$  et de densité de la forme  $\vec{j} = j_0 \frac{r}{R} \vec{u}_r$ , où  $r$  désigne la distance à l'axe  $Oz$ .

### Ex. 3

En utilisant les équations locales (de Maxwell), déterminer, partout où il est défini, le champ magnétique  $\vec{B}$  créé par un cylindre rectiligne infiniment long, à base circulaire de rayon  $R$  et parcouru par un courant d'intensité  $I$  dans la direction de l'axe et de densité de courant uniforme dans le volume du cylindre. Le milieu extérieur est assimilable au vide.



### Ex. 4

Un champ électrique a pour composantes cartésiennes dans une région vide de charges et de courants :

$$\vec{E} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ E_0 e^{\alpha x - \beta y} \end{bmatrix}.$$

1) Calculer la divergence et le rotationnel de ce champ électrique  $\vec{E}$ .

2) En déduire les composantes du champ magnétique (on suppose qu'il n'existe aucun champ stationnaire). Vérifier la valeur de sa divergence.

3) Quelle relation doivent vérifier  $\alpha$  et  $\beta$  ?

### Ex. 5

Un cylindre conducteur de conductivité  $\gamma$ , de rayon  $R$ , de longueur  $h$ , est considéré comme infiniment long et est parcouru par un courant stationnaire uniformément réparti dans la direction de l'axe, d'intensité  $I$ .



1) Déterminer le champ électromagnétique en tout point de l'espace.

2) En déduire le vecteur de Poynting en tout point de l'espace et son flux à travers la surface cylindrique du conducteur. Commenter le résultat.

3) Vérifier l'équation locale de Poynting en tout point. Interpréter.

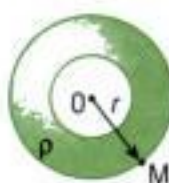
### Ex. 6

On considère un condensateur sphérique. Les armatures sont des sphères concentriques de rayons  $R_1$  et  $R_2 > R_1$ . La petite sphère est chargée avec une charge  $Q$  positive. Déterminer la capacité de ce condensateur.

## Niveau 2

### Ex. 7

Une distribution de charges est à symétrie sphérique de centre  $O$ . Les charges sont réparties en volume avec une densité  $\rho(r)$ ,  $r$  désignant la distance au point  $O$ . La densité  $\rho$  n'est non nulle qu'entre  $r = R/2$  et  $r = R$ , elle est nulle ailleurs et la charge totale de la distribution est  $Q$ . Le champ électrostatique créé par cette distribution vaut  $\vec{E} = k(\alpha r - R)\vec{u}_r$  dans l'intervalle  $[R/2 ; R]$ , où  $\vec{u}_r$  est le vecteur unitaire radial de la base des coordonnées sphériques. Le milieu est assimilable au vide.



1) Donner le domaine de définition du champ  $\vec{E}$ . Que vaut-il au point  $O$  ? Le champ est-il continu partout ?

2) En utilisant les équations locales (de Maxwell), déterminer  $\vec{E}$  pour  $r < R/2$ . En déduire la valeur de  $\alpha$ .

- 3) Établir la loi  $\rho(r)$ . Calculer la charge totale et déduire la valeur de  $k$ .
- 4) En utilisant les équations locales (de Maxwell), déterminer pour  $r > R$ . Vérifier ce résultat à l'aide du théorème de Gauss.

### Ex. 8

Un fil conducteur cylindrique, noté (1), non magnétique, de rayon  $R_1$ , d'axe  $\Delta = (Ox)$ , de très grande longueur, est parcouru par un courant continu, d'intensité  $I$ . Le milieu (1) est assimilable au vide. Le fil est entouré par un isolant et par un autre conducteur cylindrique noté (2), de rayon intérieur  $R_2$  et de rayon extérieur  $R_3$ .



Le courant d'intensité  $I$  passe toujours dans le fil (1) et revient en sens inverse par le conducteur (2), la densité de courant étant toujours uniforme et parallèle à l'axe  $\Delta$  dans chacun des deux conducteurs.

En utilisant les équations locales (de Maxwell), déterminer le vecteur champ magnétique  $\vec{B}$  créé par ce courant.

Tracer la courbe  $B(r)$ .

### Ex. 9

Une sphère  $S_p$  de rayon  $a$ , pratiquement ponctuelle et initialement neutre, émet des électrons de manière isotrope à partir d'un instant que l'on prend comme origine des dates. Soit  $\alpha$  le nombre d'électrons émis par unité de temps et  $\vec{v} = v_0 \vec{u}_r$  leur vitesse dont la valeur est considérée comme constante en tout point.

- 1) Quelle est la densité volumique de charges mobiles ? En déduire la densité de courant  $\vec{j}(r, t)$ .
- 2) Déterminer le champ électrique (supposé isotrope).
- 3) Déterminer le champ magnétique.
- 4) Vérifier la compatibilité des équations de Maxwell.
- 5) Étudier le bilan énergétique.

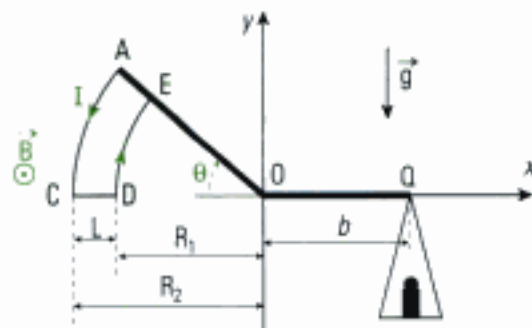
### Ex. 10 Balance de Cotton

La balance de Cotton est un système qui permet de mesurer un champ magnétique uniforme.

La balance comporte un circuit électrique conducteur ACDE et un plateau pouvant recevoir des masses marquées. CD est une portion rectiligne de longueur  $L$ ; AC et DE sont des portions de cercle de centre O et de rayon respectif  $R_2$  et  $R_1$ . Ce circuit électrique est alimenté par un générateur qui y fait circuler un courant constant  $I$ .

Le circuit se trouve dans le champ magnétique uniforme  $\vec{B} = B \vec{u}_z$ .

On note l'accélération de la pesanteur telle que  $\vec{g} = -g \vec{u}_y$ .

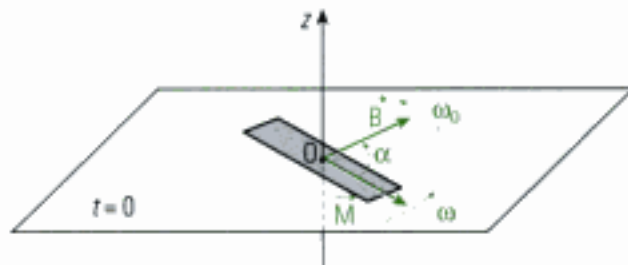


- 1) Décrire et expliquer le phénomène observé.
- 2) Déterminer l'expression de la force de Laplace qui s'exerce sur le circuit.
- 3) Quel est le moment au point O des forces de Laplace qui s'exercent sur le circuit ?
- 4) Afin d'équilibrer la balance, on place sur le plateau des masses marquées. Donner la valeur de  $m$  qui permet de maintenir l'équilibre.
- 5) Calculer  $B$  pour  $R_1 = 29 \text{ cm}$ ;  $R_2 = 31 \text{ cm}$ ;  $b = 30 \text{ cm}$ ;  $I = 3 \text{ A}$ ;  $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$  et  $m = 5 \text{ g}$ .

### Ex. 11 Le moteur synchrone

Un système de bobines (le stator) produit dans un certain volume un champ magnétique  $\vec{B}$  supposé uniforme, d'amplitude  $B_0$ , qui tourne dans le plan  $xOy$  autour de l'axe  $Oz$  avec la pulsation  $\omega_0$  constante.

D'autre part, une pièce mobile autour de l'axe  $Oz$  (le rotor) constituée d'un petit aimant portant un moment magnétique permanent  $\vec{M}$ , orthogonal à  $Oz$ , tourne dans le plan  $xOy$  d'un mouvement de rotation uniforme de pulsation  $\omega$  (voir figure ci-dessous).



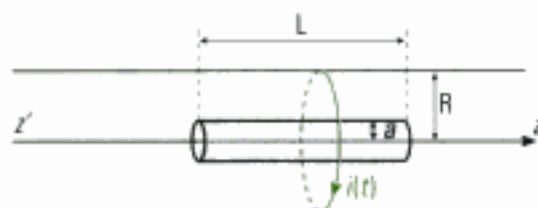
La valeur de l'angle  $(\vec{M}, \vec{B})$  à l'instant initial est notée  $\alpha$  comme indiqué sur la figure. On note  $\vec{u}_z$  le vecteur unitaire de l'axe  $Oz$ .

- 1) Calculer la valeur instantanée du couple magnétique  $\vec{\Gamma}(t)$  exercé par le champ  $\vec{B}$  sur la pièce mobile. En déduire sa valeur moyenne au cours du temps  $\langle \vec{\Gamma} \rangle$  et commenter le résultat en distinguant le cas  $\omega = \omega_0$  du cas  $\omega \neq \omega_0$ .
- 2) Pour quelles valeurs de  $\omega$  et  $\alpha$  ce dispositif fonctionne-t-il en moteur ? Justifier la terminologie de « moteur synchrone ». L'aimant suit-il ou précède-t-il alors le champ magnétique dans son mouvement ? Quelle est dans ce cas la puissance maximale  $P_m$  que peut fournir le moteur en régime permanent ? Où est précisément la source d'énergie dans ce montage ?



### Ex. 12

Un cylindre métallique de conductivité  $\gamma$ , de rayon  $a$  et de longueur  $L$ , est placé à l'intérieur d'un long solénoïde de même axe que le cylindre, de rayon  $R$ , ayant  $n$  spires par mètre, parcouru par un courant de basse fréquence d'intensité  $i(t) = I_0 \cos(\omega t)$ .



- 1) Rappeler l'expression du champ magnétique créé par ce solénoïde en tout point de l'espace.
- 2) En déduire que nécessairement, un champ électrique  $\vec{E}$  est créé. Le déterminer à l'intérieur du solénoïde.
- 3) En déduire la densité de courant volumique  $\vec{j}$  qui apparaît dans le cylindre conducteur.
- 4) Déterminer la puissance instantanée dissipée par effet Joule dans le conducteur.
- 5) Déterminer, à l'intérieur du cylindre, le champ magnétique variable  $\vec{B}$ , supposé nul à l'extérieur du cylindre et créé par la densité de courant volumique.
- 6) Calculer le rapport des amplitudes des champs  $\vec{B}$  et  $\vec{B}'$ . Interpréter.

### Ex. 13

Un dispositif est formé de deux armatures sphériques, concentriques et conductrices, de rayons  $a$  et  $b > a$ . L'espace compris entre les armatures possède une conductivité  $\gamma$ . À l'instant  $t = 0$ , l'armature intérieure est chargée avec une charge  $Q_0$ , aucune charge n'est présente ailleurs. On supposera qu'il n'existe aucun champ statique.

- 1) Montrer que la densité volumique de charges  $\rho$  reste nulle au sein du conducteur inter-armatures.
- 2) Établir l'expression du champ électromagnétique ( $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$ ) dans le milieu conducteur.
- 3) Montrer qu'aucune puissance électromagnétique n'est rayonnée par le système. Établir le bilan local des puissances.
- 4) En déduire l'expression de la charge  $Q(t)$  de l'armature intérieure.
- 5) Établir le bilan intégral des puissances et l'intégrer entre les instants  $t = 0$  et  $t = +\infty$ . Commenter.

### Ex. 14

Une sphère métallique A, de rayon  $R_1 = 6$  cm, est supposée isolante et au potentiel  $V = 30$  kV. On prend le potentiel nul à l'infini.

- 1) Calculer la charge  $Q_A$  de A, en la supposant chargée uniformément, en fonction de  $R_1$  et  $V$ .
- 2) On entoure A d'une calotte sphérique isolante B concentrique à la première, de rayon intérieur  $R_2 = 10$  cm et de rayon extérieur  $R_3 = 12$  cm.
  - a) Calculer la charge  $Q_B$  et le potentiel  $V_B$  de B. Donner la répartition de cette charge sur B.
  - b) Quel est le potentiel  $V'$  de A ?
  - c) Tracer les courbes  $V(x)$  et  $E(x)$  donnant le potentiel et le champ à une distance  $x$  du centre.
- 3) On relie ensuite B au sol. Calculer alors le potentiel  $V''$  de A.

## Niveau 3

### Ex. 15

En 1935, les frères F et H. London décrivent théoriquement « l'effet Meissner », donnant l'évolution du champ magnétique à l'intérieur d'un supraconducteur (milieu dont la permittivité et la perméabilité sont celles du vide). Lorsque le matériau est dans sa phase supraconductrice et qu'il est soumis à un champ magnétique extérieur, des courants (de densité  $\vec{j}$ ) apparaissent. Soient  $\vec{v}$  la vitesse instantanée des porteurs de charges associés à ces courants,  $m$  leur masse,  $e$  leur charge électrique et  $n$  leur densité volumique (nombre par unité de volume). On notera  $\vec{E}(M, t)$  le champ électrique en un point M de l'intérieur du supraconducteur à l'instant  $t$ .

- 1) Lien entre le champ électrique et la densité de courant.
  - a) Écrire l'équation de mouvement de chaque porteur considéré comme n'étant soumis qu'à la seule action du champ électrique.
  - b) En écrivant la relation entre  $\vec{j}$  et  $\vec{v}$ , montrer que : 
$$\vec{E} = \mu_0 \lambda^2 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t}$$
 , où l'on exprimera la constante  $\lambda$  en fonction de  $m$ ,  $n$ ,  $e$  et  $\mu_0$ .
  - c) Montrer que  $\lambda$  est homogène à une longueur. On rappelle  $\epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$ , où  $c$  est la célérité.
  - d) Calculer  $\lambda$  pour l'aluminium avec les données suivantes :  $m = 0,9 \cdot 10^{-30}$  kg,  $n = 18 \cdot 10^{28}$  m $^{-3}$ ,  $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  C,  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  SI.
- 2) Dans toute la suite, on se place en régime quasi-stationnaire. Le matériau est localement neutre ( $\rho = 0$  en tout point).
  - a) Écrire les équations de Maxwell dans le supraconducteur siège de la densité de courant  $\vec{j}$  déterminée en 1).
  - b) En déduire que le champ magnétique  $\vec{B}$  est solution de :

$$\frac{\partial}{\partial t} [\text{rot}(\text{rot} \vec{B}) + \frac{\vec{B}}{\lambda^2}] = \vec{0}.$$



3) Les frères London ont postulé que la solution devait vérifier :

$$\text{rot}(\text{rot } \vec{B}) + \frac{\vec{B}}{\lambda^2} = \vec{0}.$$

Montrer que  $\vec{B}$  doit satisfaire à l'équation dite « de London » :

$$\Delta \vec{B} - \frac{\vec{B}}{\lambda^2} = \vec{0}.$$

4) Solution de l'équation. Dans toute la suite, on considère le cas d'une plaque supraconductrice infinie dans les directions  $x$  et  $y$ , occupant le demi-espace  $z < 0$ , l'origine  $O$  étant choisie sur la surface de la plaque. On applique le champ  $\vec{B} = B_0 \vec{u}_x$ , uniforme à l'extérieur du matériau et on cherche un champ de la forme  $\vec{B} = B(z) \vec{u}_x$ , dans le matériau.



a) Quelle est la solution générale  $B(z)$  de l'équation obtenue en 3) (les constantes ne sont pas à calculer ici) ?

b) Les courants étant considérés dans cette partie comme répartis dans le volume du matériau, il n'y a pas de courants surfaciques à l'interface vide-supraconducteur. En déduire les conditions aux limites qui doivent être satisfaites par la solution générale dans la géométrie proposée.

c) En déduire l'expression de  $B(z)$  en fonction de  $B_0$ ,  $z$ ,  $\lambda$ .

d) Tracer l'allure du graphe de  $B(z)$ . Quelle distance caractéristique des variations de  $B$  peut-on définir à l'intérieur du supraconducteur ?

e) Commenter : résumer l'effet Meissner.

### Ex. 16

On charge un condensateur plan de capacité  $C$  à travers une résistance  $R$  aux bornes d'un générateur idéal de force électromotrice  $U$  constante (à l'origine des dates  $t = 0$ , le condensateur est déchargé). On suppose que ses armatures sont circulaires de surface  $S$  mais qu'elles peuvent être considérées comme des plans infinis séparés par une distance  $d$  de vide (isolant parfait).

1) Représenter le schéma électrique et déterminer la loi  $q(t)$ , charge de l'armature positive.

2) Déterminer le champ électrique  $\vec{E}(t)$  entre les armatures (on le suppose nul ailleurs). On suppose que la charge est uniformément répartie sur les armatures.

3) En déduire que, nécessairement, un champ magnétique  $\vec{B}$  existe entre les armatures. Quelle en est la source ?

4) Quelle est la topographie du champ magnétique  $\vec{B}$  (direction, variables) ? Pour cette étude, on ne suppose pas les armatures comme des plans infinis.

5) À l'aide de l'équation locale adéquate, montrer que :

$$B = \|\vec{B}\| = \frac{\mu_0 U r}{2RS} e^{-\frac{t}{RC}}.$$

6) Utiliser le théorème d'Ampère généralisé pour retrouver  $\vec{B}$  entre les armatures.

7) Le modèle est-il en accord avec l'ensemble des équations de Maxwell ?

8) Étude énergétique.

a) Dans l'étude électrique de ce circuit RC, quelle est la puissance  $P$  reçue par le condensateur ? On l'exprimera en fonction de  $U$ ,  $R$ ,  $C$  et  $t$ .

b) En déduire l'énergie  $W$  reçue par le condensateur entre l'origine des dates et l'instant  $t$ .

c) Rappeler l'équation locale de Poynting. Donner l'interprétation physique de chaque terme.

d) Déterminer l'expression du vecteur de Poynting  $\vec{R}$  à l'instant  $t$ , en fonction de  $U$ ,  $r$ ,  $R$ ,  $S$ ,  $d$ ,  $C$  et  $t$ . On donne l'expression de la capacité de ce condensateur :

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{d}.$$

e) En utilisant le vecteur de Poynting, calculer la puissance  $P$  reçue par l'intérieur du condensateur à l'instant  $t$ . On note  $a$  le rayon des armatures. Conclure.

### Ex. 17

Un milieu conducteur de conductivité  $\gamma = 5,6 \cdot 10^7 \text{ } \Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$ , caractérisé par la permittivité diélectrique  $\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi \cdot 10^9} \text{ S.I.}$  et la perméabilité magnétique  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ S.I.}$ , occupe le demi-espace  $x > 0$  et est limité par le plan  $x = 0$ .

Ce conducteur est placé dans un champ électromagnétique sinusoïdal de fréquence  $f = \frac{\omega}{2\pi}$  et invariant par translation selon les axes  $Oy$  et  $Oz$ .



On se placera dans tout le problème aux fréquences  $f < f_0$ , fréquence pour laquelle le module du courant de déplacement est égal au millième du module du courant de conduction.

1) Calculer la fréquence  $f_0$ . Commenter.

2) Établir l'équation différentielle vérifiée par le champ électrique  $\vec{E}(M, t)$  en  $M(x, y, z)$  à l'instant  $t$ , à l'intérieur du conducteur.

3) Les lignes de courant dans ce conducteur sont parallèles à l'axe  $Oy$ .

a) Montrer, qu'au point  $M(x, y, z)$ , la densité de courant volumique est de la forme :

$$\vec{j}(x, t) = j_0 e^{\delta} \cos(2\pi ft - kx) \vec{u}_y,$$

où les coefficients  $\delta$  et  $k$  seront exprimés en fonction de  $f$  et  $\gamma$ .

b) Justifier la dénomination « d'épaisseur de peau » attribuée à  $\delta$ .

4) a) Exprimer le champ magnétique  $\vec{B}(x, t)$  dans le conducteur en  $M$ .

b) En déduire la puissance moyenne  $P_R$  rayonnée à travers une surface plane  $S$  située dans le plan d'abscisse  $x$ , en fonction de  $S$ ,  $j_0$ ,  $x$ ,  $\delta$  et  $\gamma$ .

5) Exprimer la puissance moyenne  $P_J$  dissipée par effet Joule dans le parallélépipède délimité par les plans  $x = 0$  et  $x = 5\delta$  et de section  $S$ . On suppose que  $e^{-5} \ll 1$ .

6) Comparer  $P_R$  et  $P_J$ . Conclure.

### Ex. 18

Un condensateur plan est formé d'un ensemble de deux disques conducteurs, de même rayon  $R$ , parallèles, de même axe  $Oz$ , distants de  $h \ll R$  et séparés par du vide. On utilise les coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$ .



On applique, dans l'espace situé entre les deux disques, un champ électrique uniforme  $\vec{E}_1 = E_0 \cos \omega t \vec{u}_z$  où  $\vec{u}_z$  est un vecteur de base pour les coordonnées cylindriques. On suppose qu'aucun champ ne dépend de la variable  $z$ .

1) Montrer qu'il existe dans cet espace un champ magnétique  $\vec{B}_1$  créé par  $\vec{E}_1$ .

2) Donner, en la justifiant, la direction de  $\vec{B}_1$  ainsi que les variables dont il dépend.

3) À partir de l'équation de Maxwell reliant  $\vec{B}_1$  à sa source, et en utilisant l'écriture complexe, exprimer  $\vec{B}_1$  en fonction de  $\vec{E}_1$ ,  $r$ ,  $\omega$  et  $c$ .

4) En déduire la forme instantanée de  $\vec{B}_1$  (expression réelle du champ).

Le champ magnétique  $\vec{B}_1$  crée lui-même un champ électrique noté  $\vec{E}_2$ .

5) On suppose que le champ électrique  $\vec{E}_2$  est dirigé selon  $\vec{u}_r$ . Établir la relation entre  $\frac{\partial \vec{E}_2}{\partial r}$  et  $\vec{E}_1$  et en déduire  $\vec{E}_2$  en fonction de  $\vec{E}_1$ ,  $\omega$ ,  $r$  et  $c$ .

6) Écrire le champ électrique total sous la forme  $\vec{E}_1[1 - k^2(r)]$  et exprimer  $k(r)$ .

7) AN :  $\omega = 6 \cdot 10^7 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$  ;  $R = 10 \text{ cm}$  ;  $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . Calculer  $k(R)$ . Commenter.

On considère maintenant que  $\vec{E}_2$  crée un champ magnétique  $\vec{B}_2$ , qui crée  $\vec{E}_3$ , qui crée  $\vec{B}_3$  et ainsi de suite. On suppose que les champs électriques  $\vec{E}_i$  sont dirigés selon  $\vec{u}_z$ .

8) En utilisant les résultats des questions précédentes, exprimer  $\frac{\partial \vec{E}_3}{\partial r}$  en fonction de  $\vec{E}_2$  puis en fonction de  $\vec{E}_1$ . En déduire  $\vec{E}_3$  en fonction de  $\vec{E}_1$  et de  $k(r)$ .

9) Quelle est l'expression du champ électrique total à la distance  $R = 10 \text{ cm}$  de l'axe si on néglige les champs dont l'amplitude ne dépasse pas 0,01 % de l'amplitude de  $\vec{E}_1$  ? On prend  $\omega = 6 \cdot 10^7 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$  et  $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

### Ex. 19

On considère une sphère de rayon  $R$  uniformément chargée de densité de charges  $\rho$ .

1) Calculer le champ électromagnétique créé par cette distribution en tout point de l'espace, en utilisant les équations locales.

2) En déduire l'énergie  $W$  du champ électromagnétique de cette distribution.

3) On dit que l'énergie d'une distribution est égale au travail que doit fournir un opérateur pour rassembler ces charges depuis des positions où elles sont infiniment éloignées les unes des autres. L'opérateur construit la sphère précédente couche par couche : lorsque la sphère a pour rayon  $r$ , il apporte une charge  $dq$  qu'il dépose dessus, pour obtenir une sphère de rayon  $r + dr$ .

a) Exprimer la charge  $dq$ .

b) Exprimer le champ électrique créé par la sphère de rayon  $r$  à une distance  $r' > r$  de son centre. Quelle force subit la charge  $dq$  se trouvant à la distance  $r'$  ?

c) En déduire le travail  $dW_{es}$  des forces électrostatiques lorsque l'opérateur apporte la charge  $dq$  sur la sphère.

d) En déduire le travail  $dW_{op}$  que l'opérateur a alors effectué.

e) Quel est le travail total  $W_{op}$  de l'opérateur pour construire entièrement cette sphère ? Conclure.



## Indications

### Ex. 1

2) On utilise une équation de Maxwell pour obtenir l'équation aux dérivées partielles.

### Ex. 5

1) On utilise la loi d'Ohm pour déterminer le champ électrique  $\vec{E}$  et les équations locales pour obtenir le champ magnétique  $\vec{B}$ .

### Ex. 6

Il faut, en premier lieu, déterminer le champ électrique entre les armatures.

### Ex. 9

1) On étudie la charge émise pendant  $dt$ . Ces charges se sont déplacées à la vitesse  $v_0$  et se trouvent donc dans le volume d'une sphère creuse dont il reste à déterminer le volume. On en déduit la densité volumique de charges.

La densité de courant est par définition :

$$\vec{j}(M, t) = \rho(M, t) \vec{v}(M, t).$$

2) On utilise le théorème de Gauss.

3) Le champ magnétique est obtenu à partir des équations locales.

### Ex. 10

4) On applique le théorème du moment cinétique.

### Ex. 14

1) On détermine d'abord le champ électrique créé par la sphère. On en déduit  $Q_A$  en fonction de  $V$ ,  $\epsilon_0$  et  $R_1$ .

2) a) On utilise des résultats de la question 1).

b) On calcule la différence de potentiel aux bornes des deux armatures.

c) Quel est le potentiel dans un conducteur en équilibre ?

### Ex. 15

1) c) On part de l'équation  $\vec{E} = \mu_0 \lambda^2 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t}$ .

### Ex. 16

1) Il s'agit d'une étude électronique.

2) On considère les armatures comme des plans infinis.

4) Les armatures sont ici considérées comme circulaires et non infinies.

### Ex. 17

4) b) On intègre la valeur moyenne du vecteur de Poynting.

5) On intègre la valeur moyenne  $\langle \vec{j} \cdot \vec{E} \rangle$  de la puissance fournie aux porteurs de charges par unité de volume.

### Ex. 19

1) On étudie le champ électrique  $\vec{E}$  puis le champ magnétique  $\vec{B}$ .



# Solutions des exercices

## Exercices de niveau 1

### Exercice 1

1) La loi d'Ohm locale s'écrit :

$$\vec{j}(\mathbf{M}, t) = \gamma \vec{E}(\mathbf{M}, t),$$

où  $\vec{j}(\mathbf{M}, t)$  représente la densité de courant volumique qui traverse le conducteur en un point  $\mathbf{M}$  à l'instant  $t$  et  $\vec{E}(\mathbf{M}, t)$  le champ électrique au point  $\mathbf{M}$  à l'instant  $t$ .

L'équation de conservation de la charge s'écrit :

$$\operatorname{div} \vec{j}(\mathbf{M}, t) + \frac{\partial \rho}{\partial t}(\mathbf{M}, t) = 0,$$

où  $\rho(\mathbf{M}, t)$  représente la densité volumique de charges présentes au point  $\mathbf{M}$  à l'instant  $t$ .



Dans ces expressions, on fait intervenir le point  $\mathbf{M}$  pour bien insister sur le fait que ces relations sont locales et le temps  $t$  pour ne pas oublier que ce sont des grandeurs variables au cours du temps. Dans les exercices suivants, on simplifie souvent ces expressions en écrivant :

$$\vec{j} = \gamma \vec{E} \text{ et } \operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$$

2) À partir des expressions précédentes, on peut écrire une relation entre le champ électrique et la densité volumique de charge :  $\gamma \operatorname{div} \vec{E}(\mathbf{M}, t) + \frac{\partial \rho}{\partial t}(\mathbf{M}, t) = 0$ .

Il faut alors trouver une autre relation entre le champ électrique  $\vec{E}(\mathbf{M}, t)$  et la densité volumique de charge. Il s'agit de l'équation de Maxwell-Gauss qui permet d'écrire :  $\operatorname{div} \vec{E}(\mathbf{M}, t) = \frac{\rho(\mathbf{M}, t)}{\epsilon_0}$ .

On en déduit :  $\frac{\gamma}{\epsilon_0} \rho(\mathbf{M}, t) + \frac{\partial \rho}{\partial t}(\mathbf{M}, t) = 0$ .

3) On retrouve là une équation différentielle du premier degré qui se résout sous la forme :

$$\rho(\mathbf{M}, t) = \rho_0(\mathbf{M}) e^{-\frac{t}{\tau}}, \text{ avec } \tau = \frac{\epsilon_0}{\gamma}.$$

4) La courbe représentant l'évolution de la densité  $\rho$  volumique de charges a une forme exponentielle décroissante.

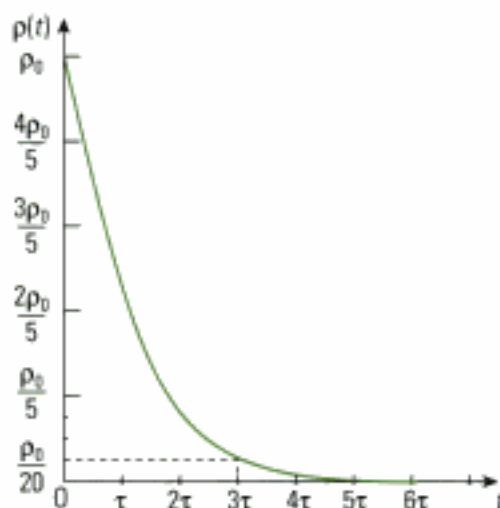
L'étude de la fonction exponentielle décroissante nous permet de dire qu'au bout d'un temps  $t = 3\tau$ ,

$\rho(\mathbf{M}, t) \approx \frac{5}{100} \rho_0$  et au bout d'un temps  $t = 5\tau$ ,

$\rho(\mathbf{M}, t) \leq 0,01 \rho_0$ .

5) Application numérique :  $\tau = 8,85 \cdot 10^{-18} \text{ s}$ .

Cela signifie qu'au bout d'un temps de l'ordre de  $5\tau$ , soit  $4,4 \cdot 10^{-17}$  seconde, la densité volumique de charges  $\rho$  pourra être considérée comme nulle. Cette durée est faible et de ce fait, les variations de  $\rho$  ne sont pas prises en compte. On peut alors considérer que la densité volumique de charges est nulle en tout point du volume d'un bon conducteur. Cependant, rien n'empêche une charge en surface.





Dans toutes les applications concernant des champs électromagnétiques (notamment les ondes) qui seront abordés en deuxième année, le champ électromagnétique varie sur des temps caractéristiques supérieurs à  $10^{-15}$  seconde. L'approximation est donc valable.

## Exercice 2

La distribution de courant a une forme cylindrique, on travaille alors en coordonnées cylindriques d'axe (Oz).

**La distribution de courant est volumique, le champ magnétique  $\vec{B}$  est donc défini et continu en tout point.**

• On met en œuvre la méthode n°4 :

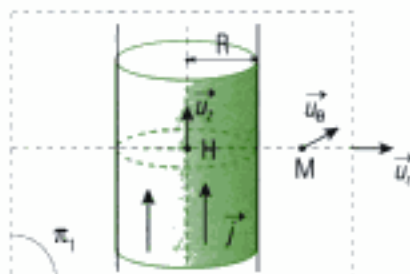
Dans un premier temps, on étudie les symétries et invariances du champ magnétique.

En un point M quelconque de l'espace, soit H le projeté orthogonal de M sur l'axe du cylindre. Le plan  $\pi_1$  (plan contenant l'axe du cylindre et la droite HM) est plan de symétrie pour la distribution,  $\vec{B}$  est donc orthogonal à ce plan.  $\vec{B}$  est dirigé selon le vecteur unitaire  $\vec{u}_\theta$  de la base cylindrique. On remarque que tout plan d'anti-symétrie ne sert à rien ici.

La distribution est invariante dans toute rotation autour de son axe, ainsi que dans toute translation selon son axe. On en déduit  $B = B(r)$ .

Dans un système de coordonnées cylindriques, on a :

$$\vec{B}(M) = B(r)\vec{u}_\theta$$



• Ensuite, il faut trouver un point où le champ magnétique a une valeur caractéristique. Or, tous les plans contenant l'axe du cylindre sont plans de symétrie de la distribution de charges.  $\vec{B}$  est donc orthogonal à tous ces plans. Ceci n'est réalisable que si le vecteur est nul soit  $\vec{B}(r=0) = \vec{0}$ .

• Puis, on utilise une équation de Maxwell qui permet de calculer le champ magnétique dans l'ARQS. Il s'agit évidemment de l'équation de Maxwell-Ampère que l'on écrit dans les domaines  $\{r \leq R\}$  et  $\{r \geq R\}$ , où le milieu est assimilable au vide.

On connaît le champ magnétique sur l'axe, on commence donc par étudier l'équation de Maxwell dans le cylindre.

► Pour  $r \leq R$ ,  $\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$  d'où  $\vec{\text{rot}} \vec{B} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rB(r)) \vec{u}_z = \mu_0 j_0 \frac{r}{R} \vec{u}_z$ .

D'où  $\frac{\partial}{\partial r} (rB(r)) = \mu_0 j_0 \frac{r^2}{R}$  qui donne :

$$rB(r) = \mu_0 j_0 \frac{r^3}{3R} + K, \text{ où } K \text{ est une constante d'intégration.}$$

Le champ magnétique nul sur l'axe  $B(r=0)$  donne  $K = 0$ .

On en déduit alors l'expression du champ magnétique :  $B(r \leq R) = \mu_0 j_0 \frac{r^2}{3R}$ .

► Pour  $r \geq R$ ,  $\vec{\text{rot}} \vec{B} = \vec{0}$  puisqu'il n'y a pas de courant à l'extérieur du cylindre d'où :

$$\vec{\text{rot}} \vec{B} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rB(r)) \vec{u}_z = \vec{0}.$$

Donc  $\frac{\partial}{\partial r} (rB(r)) = 0$  donne :  $rB(r) = K'$ , où  $K'$  est une constante d'intégration.

Or, le champ magnétique est continu à la surface du cylindre puisque l'on est en présence d'une

distribution de courant volumique, d'où :  $B(r=R) = \mu_0 j_0 \frac{R}{3}$  donne  $\mu_0 j_0 \frac{R^2}{3} = K'$ .

On en déduit alors l'expression du champ magnétique :  $B(r \leq R) = \mu_0 j_0 \frac{r^2}{3R}$ .

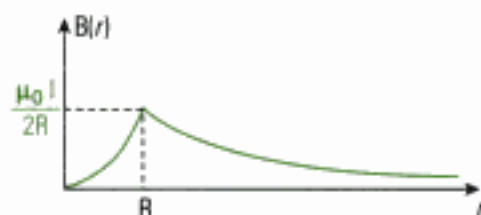
• Enfin, on détermine  $j_0$  en fonction de  $I$ . Le courant dans le cylindre est  $I = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$  où  $S$  est la section circulaire de rayon  $R$  du cylindre, soit  $d\vec{S} = r dr d\theta \vec{u}_z$ .

On en déduit  $I = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = \int_0^R j_0 \frac{r}{R} r dr \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{2}{3} \pi R^2 j_0$ , soit  $j_0 = \frac{3I}{2\pi R^2}$ .

D'où  $\vec{j} = \frac{3I}{2\pi R^2} r \vec{u}_z$ .

On obtient alors :  $B(r \leq R) = \mu_0 \frac{I r^2}{2\pi R^3}$

et  $B(r \geq R) = \mu_0 \frac{I}{2\pi r}$ .



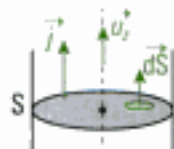
### Exercice 3

Le cylindre parcouru par un courant d'intensité  $I$  et de densité de courant uniforme dans le volume du cylindre est considéré comme une distribution de courant volumique uniforme notée  $\vec{j}$ . La distribution de courant ayant une forme cylindrique, on travaille en coordonnées cylindriques d'axe  $(Oz)$  qui représente l'axe du cylindre.

La distribution de courant est volumique donc **le champ magnétique est défini et continu en tout point**.

• Dans un premier temps, on détermine  $\vec{j}$ . Le courant dans le cylindre a une direction parallèle à l'axe du cylindre. Donc  $I = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$  où  $\vec{j}$  est dirigé suivant l'axe  $(Oz)$  et  $S$  est la section circulaire

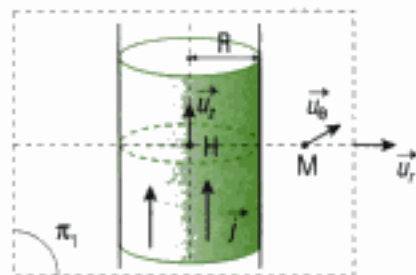
de rayon  $R$  du cylindre. On considère la section du cylindre donc  $d\vec{S} = dS \vec{u}_z$  et on suppose la répartition uniforme du courant donc  $\vec{j}$  a même valeur en tout point du cylindre.



On en déduit  $I = j \times \pi R^2$ . D'où :  $\vec{j} = \frac{I}{\pi R^2} \vec{u}_z$ .

• Afin de déterminer le champ magnétique  $\vec{B}$ , on met en œuvre la méthode n° 2 : on étudie les symétries et invariances du champ magnétique en un point  $M$  quelconque de l'espace.

Soit  $H$  le projeté orthogonal de  $M$  sur l'axe du cylindre. Le plan  $\pi_1$  (plan contenant l'axe du cylindre et la droite  $HM$ ) est plan de symétrie pour la distribution, donc  $\vec{B}$  est orthogonal à ce plan.  $\vec{B}$  est dirigé selon le vecteur unitaire  $\vec{u}_\theta$  de la base cylindrique. On remarque que tout plan d'antisymétrie ne sert à rien ici.



La distribution est invariante dans toute rotation autour de son axe, ainsi que dans toute translation selon son axe. On en déduit  $B = B(r)$ .

On conclut, dans un système de coordonnées cylindriques, que :

$$\vec{B}(M) = B(r) \vec{u}_\theta.$$

• Ensuite, il faut trouver un point où le champ magnétique a une valeur connue. Considérons un point de l'axe  $(Oz)$ . Tous les plans contenant l'axe du cylindre sont plans de symétrie de la distribution de courant. Donc  $\vec{B}(r=0)$  est orthogonal à tous ces plans. Ceci n'est réalisable que si le vecteur est nul. On a donc  $\vec{B}(r=0) = \vec{0}$ .



• Enfin, on utilise une équation de Maxwell qui permet de calculer le champ magnétique à partir de ses sources. Il s'agit évidemment de l'équation de Maxwell-Ampère que l'on écrit dans les domaines  $\{r \leq R\}$  et  $\{r \geq R\}$  où le milieu est assimilable au vide.

On remarque que l'on est dans un problème de magnétostatique où il n'y a aucune distribution de charges fixes : le champ électrique  $\vec{E}$  est donc nul en tout point.



Le champ électrique est solution du système d'équations :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{E} = 0 & \text{Maxwell-Gauss} \\ \operatorname{rot} \vec{E} = \vec{0} & \text{Maxwell-Faraday} \end{cases}$$

On obtient alors  $\vec{E} = C\vec{e}_z$ , constante que l'on choisit nulle en supposant qu'il n'y a pas de champ permanent.

On connaît le champ magnétique sur l'axe, on commence donc l'étude à l'intérieur du cylindre.

► Pour  $r \leq R$ ,  $\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$  d'où  $\operatorname{rot} \vec{B} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [rB(r)] \vec{u}_z = \mu_0 j \vec{u}_z$ .

Le champ magnétique satisfait donc l'équation :

$$\frac{\partial}{\partial r} [rB(r)] = \mu_0 j r.$$

Cela donne :  $rB(r) = \mu_0 j \frac{r^2}{2} + K$  où  $K$  est une constante d'intégration.

Le champ magnétique nul sur l'axe  $B(r=0) = 0$  donne  $K = 0$ .

On en déduit alors l'expression du champ magnétique :

$$\mathbf{B}(r \leq R) = \mu_0 j \frac{r}{2}.$$

► Pour  $r \geq R$ ,  $\operatorname{rot} \vec{B} = \vec{0}$  puisqu'il n'y a pas de courant à l'extérieur du cylindre d'où :

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [rB(r)] \vec{u}_z = \vec{0}.$$

Le champ magnétique satisfait donc l'équation :

$$\frac{\partial}{\partial r} [rB(r)] = 0.$$

Cela donne :  $rB(r) = K'$  où  $K'$  est une constante d'intégration.

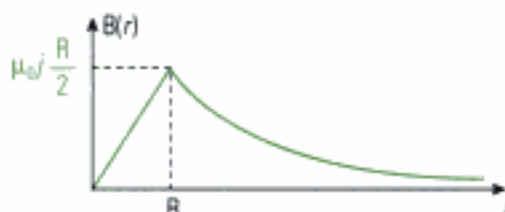
Le champ magnétique est continu à la surface du cylindre puisque l'on est en présence d'une distribution de courant volumique, alors  $RB(r=R) = \mu_0 j \frac{R^2}{2} = K'$ .

On en déduit alors l'expression du champ magnétique :

$$\mathbf{B}(r \geq R) = \mu_0 j \frac{R^2}{2r}.$$



La courbe du champ magnétique  $B$  en fonction de la distance  $r$  est alors :



On retrouve la même distribution d'amplitude de champ dans la méthode n° 2. On aurait ainsi pu tout de suite avoir l'évolution de  $B(r)$  avec l'analogie suivante :

	électrostatique	magnétostatique
champ	$\vec{E}$	$\vec{B}$
densité volumique	de charges $\rho$	de courant $\vec{j}$
constante	$\epsilon_0$	$\frac{1}{\mu_0}$

## Exercice 4

1) En coordonnées cartésiennes, la divergence du champ électrique s'écrit :

$$\text{div} \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} = 0.$$

En coordonnées cartésiennes, le rotationnel du champ électrique s'écrit :

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = - \frac{\partial E_x}{\partial x} \vec{u}_y, \text{ soit } \vec{\text{rot}} \vec{E} = \beta E_x \vec{u}_y.$$

2) On met en œuvre la méthode n° 4 :

On connaît le champ électrique. Pour déterminer le champ magnétique, on utilise alors l'équation de Maxwell-Faraday.

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \text{ donne } \beta E_0 e^{\alpha x - \beta x} \vec{u}_y = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

La constante d'intégration étant nulle puisqu'on suppose qu'il n'existe aucun champ stationnaire, on trouve :

$$\vec{B} = - \frac{\beta}{\alpha} E_0 e^{\alpha x - \beta x} \vec{u}_y.$$

Il reste à vérifier l'équation de Maxwell-Flux :  $\text{div} \vec{B} = \frac{\partial B}{\partial y} = 0$ .

3) Enfin, la quatrième équation de Maxwell va permettre de trouver une relation entre  $\alpha$  et  $\beta$ .

On a  $\vec{\text{rot}} \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  puisque l'étude s'effectue dans une région vide de courant.

$$\text{Or } \vec{\text{rot}} \vec{B} = \frac{\partial B}{\partial x} \vec{u}_z = \frac{\beta^2}{\alpha} E_0 e^{\alpha x - \beta x} \vec{u}_z \text{ et } \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \epsilon_0 \mu_0 \alpha E_0 e^{\alpha x - \beta x} \vec{u}_z.$$

On en déduit :  $\frac{\beta^2}{\alpha} = \epsilon_0 \mu_0 \alpha$  soit  $\beta^2 = \epsilon_0 \mu_0 \alpha^2$ .



Il est toujours intéressant d'effectuer l'analyse dimensionnelle d'une égalité trouvée. Ici,  $\beta$  s'exprime en  $\text{m}^{-1}$ ,  $\alpha$  en  $\text{s}^{-1}$  et  $\epsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}$  en  $\text{s}^2 \cdot \text{m}^{-2}$ , ce qui prouve la validité dimensionnelle de la relation.

## Exercice 5

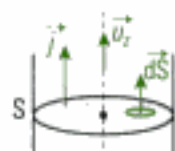
1) On met en œuvre la méthode n° 4 :

Le cylindre parcouru par un courant d'intensité  $I$  de densité uniforme dans le volume du cylindre est considéré comme une distribution de courant volumique notée  $\vec{j}$ . La distribution de courant ayant une forme cylindrique, on travaille en coordonnées cylindrique d'axe ( $Oz$ ) qui représente l'axe du cylindre.

La distribution de courant est volumique donc **les champs électrique et magnétique sont définis et continus en tout point.**

• Dans un premier temps, on détermine  $\vec{j}$ . Le courant dans le cylindre a une direction parallèle à l'axe du cylindre. Donc,  $I = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$  où  $\vec{j}$  est dirigé suivant l'axe ( $Oz$ ) et  $S$  est la section circulaire de rayon  $R$  du cylindre. On considère la section du cylindre donc  $d\vec{S} = dS \vec{u}_z$  et on suppose la répartition uniforme donc  $\vec{j}$  a même valeur en tout point du cylindre.

On en déduit  $I = j \times \pi R^2$ . D'où :  $\vec{j} = \frac{I}{\pi R^2} \vec{u}_z$ .



• Tout d'abord, le champ magnétique  $\vec{B}$  de cette distribution a été défini à l'exercice 3. On avait trouvé :

$$\vec{B} = \begin{cases} \mu_0 j \frac{r}{2} \vec{u}_\theta = \mu_0 \frac{Ir}{2\pi R^2} \vec{u}_\theta & \text{pour } r \leq R \\ \mu_0 j \frac{R^2}{2r} \vec{u}_\theta = \mu_0 \frac{I}{2\pi r} \vec{u}_\theta & \text{pour } r \geq R \end{cases}$$

⚠ Concernant le champ électrique  $\vec{E}$ , on l'avait supposé nul dans l'exercice 3, car on se trouvait dans un problème de magnétostatique (sans distribution de charges fixes) avec un cylindre considéré comme conducteur parfait (sa conductivité  $\gamma$  était alors supposée infinie).

• Étudions maintenant le champ électrique  $\vec{E}$ .

La loi d'Ohm permet alors de déterminer le champ électrique dans le cylindre :  $\vec{E} = \frac{\vec{j}}{\gamma}$ .

On a donc : **pour  $r \leq R$ ,  $\vec{E} = \frac{I}{\gamma\pi R^2} \vec{u}_z$ .**

Comme il n'y a pas de distribution de charges, le champ électrique est nul à l'extérieur.

On a donc : **pour  $r \geq R$ ,  $\vec{E} = \vec{0}$ .**

2) • À partir de ces résultats, on peut déterminer le vecteur de Poynting en tout point :

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}.$$

⚠ On note  $\vec{\Pi}$  le vecteur de Poynting pour éviter la confusion avec le rayon  $R$  du conducteur.

**Pour  $r \leq R$ , on a :  $\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{I}{\gamma\pi R^2} \vec{u}_z \wedge \frac{Ir}{2\pi R^2} \vec{u}_\theta = -\frac{I^2}{\gamma(\pi R^2)^2} \frac{r}{2} \vec{u}_r$ .**

**Pour  $r \geq R$ , comme  $\vec{E} = \vec{0}$ , on a  $\vec{\Pi} = \vec{0}$ .**

• Le vecteur de Poynting à l'interface entre le conducteur et le vide est :

$$\vec{\Pi} = -\frac{I^2}{\gamma(\pi R^2)^2} \frac{R}{2} \vec{u}_r.$$

Le flux du vecteur de Poynting à travers la surface du conducteur est le flux de  $\vec{\Pi}$  à travers la surface  $S$  dont le vecteur surface élémentaire est  $d\vec{S} = dS \vec{u}_r = R d\theta dz \vec{u}_r$ .

$$\iint_S \vec{\Pi} \cdot d\vec{S} = \iint_S -\frac{I^2}{\gamma(\pi R^2)^2} \frac{R}{2} R d\theta dz = -\frac{I^2}{2\gamma\pi^2 R^2} \int_0^h dz \times \int_0^{2\pi} d\theta.$$

$$\text{Donc } \iint_S \vec{\Pi} \cdot d\vec{S} = -\frac{h}{\gamma\pi R^2} I^2 = -\frac{h}{\gamma S} I^2.$$

⚠ La puissance du rayonnement électromagnétique **reçue** par un système  $\tau$  délimité par une surface fermée  $S$  correspond au flux :  $-\oint_S \vec{\Pi} \cdot d\vec{S}$ , où  $d\vec{S}$  est orientée vers l'extérieur du système.

On retrouve que l'énergie électromagnétique cédée par le conducteur à l'extérieur à travers sa surface est négative. Il s'agit donc d'**une énergie reçue par le conducteur**.

Le conducteur ne peut emmagasiner d'énergie. Un bilan énergétique montre alors que cette énergie est forcément cédée à l'extérieur sous une autre forme. Cette énergie est ainsi cédée sous forme d'énergie thermique qu'on appelle « effet Joule ».

La puissance perdue par effet Joule est celle cédée par le champ aux porteurs de charges du conducteur :

$$P_J = \iiint_\tau \vec{j} \cdot \vec{E} d\tau = \iiint_\tau \frac{j^2}{\gamma} d\tau = \frac{I^2}{\gamma S^2} \tau = \frac{I^2 h}{\gamma S}.$$





La puissance thermique reçue par un système  $\tau$  et fournie par la matière (les porteurs de charges) correspond à l'intégrale :

$$- \iiint_{\tau} \vec{j} \cdot \vec{E} d\tau.$$



On retrouve bien que la puissance dissipée par effet Joule est proportionnel à  $I^2$ .

En première année, on a vu que cette puissance s'écrit pour un conducteur de résistance  $R_{\text{elec}}$  sous la forme  $R_{\text{elec}} I^2$ .

On en déduit la résistance du conducteur cylindrique de longueur  $h$  et de rayon  $R$  :  $R_{\text{elec}} = \frac{h}{\gamma S}$ .

3) On distingue deux domaines :

• **Pour  $r \leq R$** , l'énergie électromagnétique par unité de volume est :

$$\frac{dW}{d\tau} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \left( \frac{I}{\gamma \pi R^2} \right)^2 + \frac{\mu_0}{2} \left( I \frac{r}{2\pi R^2} \right)^2.$$

Le courant  $I$  est continu donc :  $\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{dW}{d\tau} \right) = 0$ .

On calcule  $\text{div} \vec{\Pi} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\Pi) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( -\frac{I^2}{\gamma(\pi R^2)^2} \frac{r^2}{2} \right) = -\frac{I^2}{\gamma(\pi R^2)^2}$  et  $\vec{j} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\gamma} \left( \frac{I}{\pi R^2} \right)^2$ .

On vérifie alors que :  $\text{div} \vec{\Pi} + \vec{j} \cdot \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{dW}{d\tau} \right) = 0$ .

• **Pour  $r \geq R$** , l'énergie électromagnétique par unité de volume est :

$$\frac{dW}{d\tau} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{\mu_0}{2} \left( \frac{I}{2\pi R^2} \right)^2.$$

Le courant  $I$  est continu donc :  $\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{dW}{d\tau} \right) = 0$ .

On calcule  $\text{div} \vec{\Pi} = 0$  et  $\vec{j} \cdot \vec{E} = 0$ .

On vérifie alors que :  $\text{div} \vec{\Pi} + \vec{j} \cdot \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{dW}{d\tau} \right) = 0$ .

**L'équation locale de Poynting est donc vérifiée en tout point.**

## Exercice 6

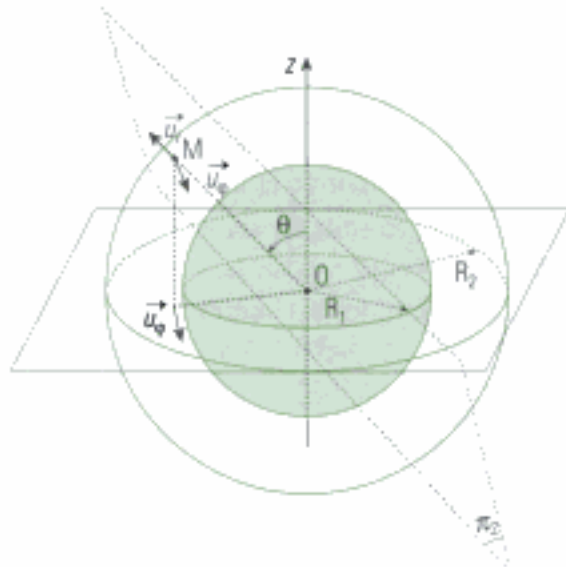
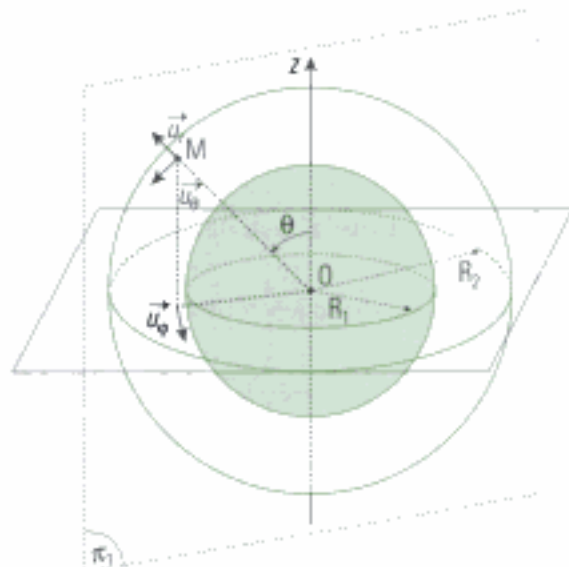
1) On met en œuvre la méthode n° 4.

• **Les charges sont réparties en volume, le champ électrique  $\vec{E}$  est donc défini et continu en tout point.**

• La distribution de charges est à symétrie sphérique, on utilisera alors les coordonnées sphériques et les vecteurs de base associés  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\phi)$ .

En premier lieu, on étudie les symétries et invariances du champ électrique en un point  $M$  de l'espace. Les plans  $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$  et  $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\phi)$  sont des plans de symétrie pour la distribution de charge.

Le champ électrique est donc porté par la direction de la droite intersection des deux plans.  $\vec{E}$  est dirigé selon  $\vec{u}_r$ .



La distribution de charge est invariante par les rotations d'angle  $\theta$  et  $\varphi$ . Le champ électrique n'est alors fonction que de la variable  $r$ .

On a donc :  $\vec{E}(M) = E(r)\vec{u}_r$ .

• On applique le théorème de Gauss en prenant une surface  $S$  de Gauss à  $r$  constant ( $R_1 < r < R_2$ ) pour simplifier l'intégration. Cette surface est bien une sphère. Le théorème de Gauss sur cette sphère de rayon  $r$  donne :

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}.$$

Or, l'élément de surface est orienté suivant  $\vec{u}_r$ , donc  $\vec{E} \cdot d\vec{S} = E(r)dS$  où  $E(r)$  est constant sur la surface d'intégration.

D'où  $\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oiint_S E(r)dS = E(r) \oiint_S dS = E(r) S = \frac{Q}{\epsilon_0}$  où  $S = 4\pi r^2$ .

On en déduit :  $\vec{E}(R_1 < r < R_2) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$ .

• On détermine la différence de potentiel aux bornes du condensateur sphérique par la circulation du champ électrique entre les deux armatures.

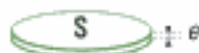
On rappelle qu'en régime statique,  $\vec{E} = -\text{grad } V$ , soit  $V_A - V_B = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$  où  $A$  et  $B$  sont deux points quelconques.

L'armature positive est l'armature interne, on intègre donc de  $R_1$  à  $R_2$  :  $U = \int_{R_1}^{R_2} \vec{E} \cdot d\vec{l}$  où  $d\vec{l} = dr \vec{u}_r$ , puisque l'on se déplace dans le sens des rayons croissants.

On obtient  $U = \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \left[ -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \right]_{R_1}^{R_2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = \frac{Q(R_2 - R_1)}{4\pi\epsilon_0 R_1 R_2}$ .

Par définition,  $C = \frac{Q}{U}$ . D'où :  $C = \frac{4\pi\epsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1}$ .

💡 On peut faire le parallèle avec l'expression de la capacité d'un condensateur plan :  $C = \frac{S\epsilon_0}{e}$ . Ici, la distance entre les armatures est  $e = R_2 - R_1$  et la moyenne géométrique des surfaces des deux armatures  $4\pi R_1^2$  et  $4\pi R_2^2$  est bien  $S = 4\pi R_1 R_2$ .



## Exercices de niveau 2

### Exercice 7

1) On met en œuvre la méthode n° 4.

• Les charges sont réparties en volume donc le champ électrique  $\vec{E}$  est défini et continu en tout point.

• La distribution de charges est à symétrie sphérique, on utilisera donc les coordonnées sphériques et les vecteurs de base associés  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\phi)$ .

Les plans  $(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ ,  $(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\phi)$  et  $(O, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\phi)$  sont des plans de symétrie de la distribution de charges. Le champ électrique  $\vec{E}(O)$  appartient alors à ces trois plans. Ceci n'est possible que si le vecteur  $\vec{E}(O)$  est nul puisque ces plans n'ont aucune direction commune :

$$\vec{E}(O) = \vec{0}.$$

2) • L'équation de Maxwell qui permet de déterminer le champ électrique à partir de la densité volumique de charges est l'équation de Maxwell-Gauss :  $\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ .

Avant tout, on étudie les symétries et invariances du champ électrique en un point M de l'espace. Les plans  $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$  et  $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\phi)$  sont des plans de symétrie pour la distribution de charges. Le champ électrique est donc porté par la direction de la droite intersection des deux plans.  $\vec{E}$  est dirigé selon  $\vec{u}_r$ .

La distribution de charge est invariante par les rotations d'angle  $\theta$  et  $\phi$ . Le champ électrique n'est alors fonction que de la variable  $r$ .

On a donc :

$$\vec{E}(M) = E(r)\vec{u}_r.$$

En un point M tel que  $r \leq \frac{R}{2}$ , la densité volumique de charges est nulle. Donc  $\text{div} \vec{E} = 0$ . Ce qui donne :

$$\text{div} \vec{E} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 E)}{\partial r} = 0.$$

On en déduit :

$$r^2 E(r) = K \text{ où } K \text{ est une constante d'intégration.}$$

$E(r=0) = 0$  donne  $K = 0$ .

On en conclut :

$$\vec{E}\left(r \leq \frac{R}{2}\right) = \vec{0}.$$

• Pour déduire la valeur de  $\alpha$ , on utilise la continuité du champ électrique à l'interface  $r = \frac{R}{2}$ .

On a donc :  $E(R) = k\left(\alpha \frac{R}{2} - R\right) = 0$ .

On en déduit :

$$\alpha = 2.$$

3) • Pour déterminer l'expression de  $\rho(r)$ , il faut utiliser l'équation de Maxwell-Gauss dans le volume défini par  $\left\{\frac{R}{2} \leq r \leq R\right\}$ .

On obtient alors :  $\text{div} \vec{E} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 E)}{\partial r} = 2k\left(3 - \frac{R}{r}\right) = \frac{\rho(r)}{\epsilon_0}$ .

Donc :

$$\rho(r) = 2k\epsilon_0\left(3 - \frac{R}{r}\right).$$

• La charge totale de la distribution est donnée par intégration de la densité volumique de charges :

$Q = \iiint_V \rho(r) d\tau$  où  $d\tau$  est un élément de volume de la distribution. L'étude de la distribution s'effectue en coordonnées sphériques, il faut donc utiliser l'élément de volume dans ces coordonnées :

$d\tau = r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi$ . Pour décrire le volume de la sphère creuse, il faut intégrer sur  $r$  variant de  $\frac{R}{2}$  à  $R$ ,  $\theta$  variant entre 0 et  $\pi$  (revoir le § A.3 du chapitre 1) et  $\phi$  variant de 0 à  $2\pi$ .



On obtient :  $Q = \int_{R/2}^R 2k\epsilon_0 \left(3 - \frac{R}{r}\right) r^2 dr \times \int_0^{2\pi} d\phi \times \int_0^\pi \sin\theta d\theta = 8\pi k\epsilon_0 \left[ r^3 - R \frac{r^2}{2} \right]_{R/2}^R$ .

On trouve alors  $Q = 4\pi k\epsilon_0 R^3$ , ce qui donne :  $k = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3}$ .

4) • De même que dans la question 2, on utilise la relation de Maxwell-Gauss dans un milieu vide de charges. Cela donne :

$$r^2 E(r) = K' \text{ où } K' \text{ est une constante d'intégration.}$$

La continuité du champ électrique à l'interface  $r = R$  donne :

$$K' = R^2 E(r = R) = R^2 k(2R - R) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}.$$

On trouve :  $\vec{E}(r > R) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$ .

• L'application du théorème de Gauss pour  $r > R$  nécessite l'étude des symétries qui a permis de déterminer que le champ électrique est de la forme  $\vec{E}(M) = \vec{E}(r)\vec{u}_r$ .

On choisit alors une surface de Gauss à  $r$  constant pour simplifier l'intégration. Cette surface est bien sûr une sphère. On applique ensuite le théorème de Gauss sur cette sphère de rayon  $r$  :

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}.$$

Or l'élément de surface est orienté suivant  $\vec{u}_r$ , donc  $\vec{E} \cdot d\vec{S} = E(r) dS$  où  $E(r)$  est constant sur la surface d'intégration.

D'où  $\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_S E(r) dS = E(r) \oint_S dS = E(r) S$  où  $S = 4\pi r^2$ .

On en déduit :  $\vec{E}(r > R) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$ .

**On retrouve donc le même résultat.**



Pour  $r > R$ , la distribution de charges est équivalente à une charge ponctuelle  $Q$  placée en  $O$ .

## Exercice 8

On met en œuvre la méthode n° 4.

• Les cylindre (1) et (2) parcourus par un courant d'intensité  $I$  et de densité uniforme dans le volume du cylindre sont considérés comme des distributions de courant volumique notés respectivement  $\vec{j}_1$  et  $\vec{j}_2$ . Les distributions de courant ayant une forme cylindrique, on travaille en coordonnées cylindrique d'axe  $(Ox)$  qui coïncide avec l'axe du cylindre.

Les distributions de courant sont volumiques donc **le champ magnétique est défini et continu en tout point.**

• Dans un premier temps, on détermine  $\vec{j}_1$  et  $\vec{j}_2$ .

Pour le cylindre (1),  $I = \iint_{S_1} \vec{j}_1 \cdot d\vec{S}$ , où  $\vec{j}_1$  est dirigé suivant l'axe  $\Delta$  et  $S_1$  est la section circulaire de rayon  $R_1$  du cylindre. On considère la section du cylindre donc  $d\vec{S} = dS \vec{u}_z$  et on suppose la répartition uniforme donc  $\vec{j}_1$  a même valeur en tout point du cylindre.

On en déduit  $I = j_1 \times \pi R_1^2$ . D'où :  $\vec{j}_1 = \frac{I}{\pi R_1^2} \vec{u}_z$ .

Pour le cylindre (2),  $I = \iint_{S_2} \vec{j}_2 \cdot d\vec{S}$ , où  $\vec{j}_2$  est dirigé suivant l'axe  $\Delta$  et  $S_2$  est la section du cylindre de

rayon intérieur  $R_2$  et de rayon extérieur  $R_3$ . On considère la section du cylindre donc  $d\vec{S} = dS\vec{u}_z$  et on suppose la répartition uniforme donc  $\vec{j}_2$  a même valeur en tout point du cylindre et le sens opposé à  $\vec{j}_1$ .

On en déduit  $I = -j_2 \times \pi(R_3^2 - R_2^2)$ . D'où :  $\vec{j}_2 = \frac{I}{\pi(R_3^2 - R_2^2)} \vec{u}_z$ .

• Dans un deuxième temps, on étudie les symétries et invariances du champ magnétique en un point M quelconque de l'espace.

Soit H le projeté orthogonal de M sur l'axe du cylindre. Le plan  $\pi_1$  (plan contenant l'axe du cylindre et la droite HM) est plan de symétrie pour la distribution, donc  $\vec{B}$  est orthogonal à ce plan.  $\vec{B}$  est dirigé selon le vecteur unitaire  $\vec{u}_\theta$  de la base cylindrique.

On remarque que tout plan d'antisymétrie ne sert à rien ici.



La distribution est invariante dans toute rotation autour de son axe, ainsi que dans toute translation selon son axe puisque le fil est supposé de grande longueur. On en déduit  $B = B(r)$ .

On en conclut, dans un système de coordonnées cylindriques, que :

$$\vec{B}(M) = B(r)\vec{u}_\theta.$$

• Ensuite, il faut trouver un point où le champ magnétique a une valeur connue. Intéressons-nous à  $\vec{B}(r = 0)$ . Tous les plans contenant l'axe du cylindre sont plans de symétrie de la distribution de courant. Donc  $\vec{B}(r = 0)$  est orthogonal à tous ces plans. Ceci n'est réalisable que si le vecteur est nul. Donc  $\vec{B}(r = 0) = \vec{0}$ .

• Enfin, on utilise une équation de Maxwell qui permet de calculer le champ magnétique en statique. Il s'agit évidemment de l'équation de Maxwell-Ampère que l'on écrit dans les domaines  $\{r \leq R_1\}$  ;  $\{R_1 \leq r \leq R_2\}$  ;  $\{R_2 \leq r \leq R_3\}$  et  $\{r \geq R_3\}$  où le milieu est partout assimilable au vide.

On connaît le champ magnétique sur l'axe donc on commence par l'étude du champ  $\vec{B}$  dans le cylindre (1).

► Pour  $r \leq R_1$ ,  $\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}_1$  d'où  $\vec{\text{rot}} \vec{B} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [rB(r)] \vec{u}_z = \mu_0 j_1 \vec{u}_z$ .

Cela donne :

$$rB(r) = \mu_0 j_1 \frac{r^2}{2} + K_1 \text{ où } K_1 \text{ est une constante d'intégration.}$$

Le champ magnétique est nul sur l'axe :  $B(r = 0) = 0$  donc  $K_1 = 0$ .

On en déduit alors l'expression du champ magnétique :

$$\vec{B}(r \leq R_1) = \mu_0 I \frac{r}{2\pi R_1^2} \vec{u}_\theta.$$

► Pour  $R_1 \leq r \leq R_2$ ,  $\vec{\text{rot}} \vec{B} = \vec{0}$  puisqu'il n'y a pas de courant dans l'isolant par définition d'où :

$$\vec{\text{rot}} \vec{B} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [rB(r)] \vec{u}_z = \vec{0}.$$

Cela donne :

$$rB(r) = K_2 \text{ où } K_2 \text{ est une constante d'intégration.}$$

Le champ magnétique est continu à la surface du cylindre (1) puisque l'on est en présence d'une distribution de courant volumique,  $B(r = R_1) = \mu_0 I \frac{1}{2\pi R_1} = \frac{K_2}{R_1}$  donne :  $K_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi}$ .

On en déduit alors l'expression du champ magnétique :

$$B(R_1 \leq r \leq R_2) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}.$$

► Pour  $R_2 \leq r \leq R_3$ ,  $\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}_2$  d'où  $\vec{\text{rot}} \vec{B} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [rB(r)] \vec{u}_z = \mu_0 j_2 \vec{u}_z$ .

Cela donne :

$$rB(r) = \mu_0 j_2 \frac{r^2}{2} + K_3 = -\mu_0 \frac{I}{\pi(R_3^2 - R_2^2)} \frac{r^2}{2} + K_3 \text{ où } K_3 \text{ est une constante d'intégration.}$$

Par continuité à l'interface  $r = R_2$ ,  $R_2 B(R_2) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} = -\mu_0 \frac{I}{\pi(R_3^2 - R_2^2)} \frac{R_2^2}{2} + K_3$  donc :

$$K_3 = \mu_0 \frac{IR_2^2}{2\pi(R_3^2 - R_2^2)}.$$

On en déduit alors l'expression du champ magnétique :

$$\vec{B}(R_2 \leq r \leq R_3) = \mu_0 I \frac{(R_3^2 - r^2)}{2\pi R_2 (R_3^2 - R_2^2)} \vec{u}_\theta.$$

► Pour  $r \geq R_3$ ,  $\vec{\text{rot}} \vec{B} = \vec{0}$  d'où :

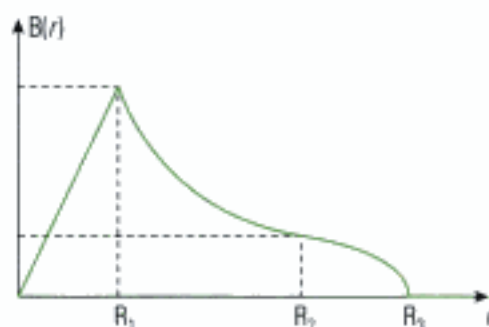
$$rB(r) = K_4 \text{ où } K_4 \text{ est une constante d'intégration.}$$

Le champ magnétique est continu à la surface du cylindre (2) puisque l'on est en présence d'une distribution de courant volumique,  $B(r = R_2) = 0$  donne donc :  $K_4 = 0$ .

On en déduit alors l'expression du champ magnétique :

$$\vec{B}(r \geq R_3) = \vec{0}.$$

• On peut alors tracer l'évolution du champ magnétique en fonction de la distance  $r$  à l'axe ( $Oz$ ) :



## Exercice 9

1) La sphère  $Sp$  de rayon  $a$  émet des électrons de manière isotrope. Cette sphère se charge donc positivement au cours du temps et les électrons émis de manière isotrope se répartissent dans l'espace autour de cette sphère, d'où l'apparition d'une densité volumique de charges mobiles pouvant dépendre du temps. On calcule alors le nombre d'électrons présents dans un élément de volume  $d\tau$  de l'espace. La distribution de charge ayant une symétrie sphérique, on utilisera les coordonnées sphériques.

• Les électrons sont répartis de manière isotrope, donc la distribution de charges est invariante par les rotations d'angle  $\theta$  et  $\varphi$  des coordonnées sphériques. On en conclut que la densité volumique de charges  $\rho(M, t)$  ne dépend que de  $r$  :  $\rho(M, t) = \rho(r, t)$ .

• Tout d'abord, il n'y a aucun électron émis en dehors de la sphère  $S(O, v_0 t)$ . On a donc :

$$\rho(r > v_0 t, t) = 0.$$

• Intéressons-nous maintenant à la densité volumique  $\rho$  de charges à l'intérieur de la sphère  $S(O, v_0 t)$ .

Entre les instants  $t$  et  $t + dt$ , un électron qui possède la vitesse  $v_0$  parcourt la distance  $dr = v_0 dt$ . Soit  $0 < t_0 < t$ . On retrouve à l'instant  $t$  les électrons émis entre  $t_0$  et  $t_0 + dt$  dans une sphère creuse de rayon intérieur  $r = v_0(t - (t_0 + dt))$  et de rayon extérieur  $r + v_0 dt$ . En écrivant  $dr = v_0 dt$ , ce volume s'écrit :

$$d\tau = r^2 dr \iint \sin\theta d\theta d\varphi = 4\pi r^2 dr \text{ car on somme sur les angles, et pas sur } r.$$



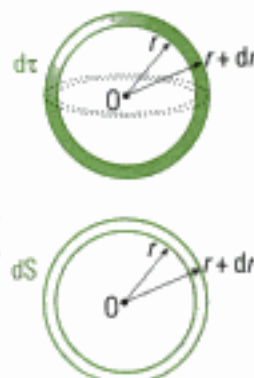


On peut remarquer que le volume  $d\tau$  déterminé n'est autre que la « différentielle » du volume de la sphère  $S(O, r)$  de centre  $O$  et de rayon  $r$ .

$$d\tau = d\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right) = 4\pi r^2 dr.$$

De la même façon, lorsque l'on cherche la surface  $dS$  correspondant à un accroissement  $dr$  du rayon du disque de centre  $O$  et de rayon  $r$ , on peut écrire la « différentielle » de l'expression de la surface du disque.

$$dS = d(\pi r^2) = 2\pi r dr.$$



Ces charges ont été émises pendant la durée  $dt$ , la charge correspondante vaut donc  $dq = -\alpha e dt$ , et la densité volumique de ces charges à la distance  $r$  s'écrit donc :

$$\rho(r < v_0 t, t) = \frac{dq}{d\tau} = -\frac{\alpha e dt}{4\pi r^2 dr} = -\frac{\alpha e}{4\pi r^2 v_0}.$$

• Par définition, la densité de courant volumique est :  $\vec{j}(r, t) = \rho(r, t)\vec{v}$ .

D'où :

$$\vec{j}(r, t) = \begin{cases} -\frac{\alpha e}{4\pi r^2 v_0} \vec{u}_r & \text{pour } r < v_0 t \\ \vec{0} & \text{pour } r > v_0 t \end{cases}$$

2) Afin de déterminer le champ électrique, on utilise le théorème de Gauss.

Pour cela, on étudie les symétries et invariances de la distribution de charges. On travaille toujours en coordonnées sphériques avec les vecteurs de base  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\phi)$ . Soit  $M$  un point quelconque de l'espace, les plans  $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$  et  $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\phi)$  sont des plans de symétrie de la distribution de charges. Le champ électrique  $\vec{E}(M, t)$  est alors dirigé selon l'intersection de ces plans, c'est-à-dire suivant le vecteur  $\vec{u}_r$ . La distribution de charges est invariante par les rotations d'angle  $\theta$  et  $\phi$  donc le champ électrique ne dépend que des variables  $r$  et  $t$ . On en conclut :

$$\vec{E}(M, t) = E(r, t)\vec{u}_r.$$

Déterminons  $E(r, t)$ . La surface de Gauss à utiliser est une sphère de centre  $O$  et de rayon  $r$  du fait de la configuration du champ électrique. Un élément de surface de cette sphère sera alors :

$$d\vec{S} = r^2 \sin\theta d\theta d\phi \vec{u}_r.$$

Le théorème de Gauss s'écrit :

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0},$$

où  $Q$  représente la charge présente dans le volume délimité par la surface  $S$ . Cette charge  $Q$  est constituée par la charge de la sphère de rayon  $a$  à laquelle on ajoute la charge des électrons compris dans le volume délimité par la surface  $S$ . On distingue deux cas à l'instant  $t$ .

• Si la surface  $S$  possède un rayon  $r > v_0 t$ , alors il n'y a aucune charge à l'extérieur du volume délimité par  $S$ . Donc la charge à l'intérieur de  $S$  est la charge initiale. Or, la sphère est initialement neutre. Donc  $Q = 0$ .

On en conclut :

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_S E(r, t) r^2 \sin\theta d\theta d\phi = E(r, t) r^2 \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = 4\pi E(r, t) r^2 = 0.$$

Ce qui donne :

$$\text{Pour } r > v_0 t, \vec{E}(r, t) = \vec{0}.$$

• Si la surface  $S$  possède un rayon  $r < v_0 t$ , alors il y a des charges à l'extérieur du volume délimité par  $S$ . La charge à l'intérieur de  $S$  est donc la charge de la sphère  $S_p$  émettrice à laquelle on ajoute la charge des électrons présents dans le volume.

La sphère est initialement neutre et a émis  $\alpha t$  électrons. Elle se trouve donc chargée positivement d'une charge  $\alpha e t$ .

La quantité de charges négatives présentes dans le volume délimité par S est donné par :

$$\iiint_V \rho(r', t) r'^2 \sin\theta dr' d\theta d\varphi = 4\pi \int_0^r \rho(r', t) r'^2 dr' = -\frac{\alpha e}{v_0} r.$$

Donc  $Q = \alpha e t - \frac{\alpha e}{v_0} r$ .

On en conclut :

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_S E(r, t) r^2 \sin\theta d\theta d\varphi = E(r, t) r^2 \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = 4\pi E(r, t) r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} \left( \alpha e t - \frac{\alpha e}{v_0} r \right).$$

Cela donne :

$$\text{Pour } r < v_0 t, \quad \vec{E}(r, t) = \frac{\alpha e \left( t - \frac{r}{v_0} \right)}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r.$$

On étudie d'abord les symétries et invariances de la distribution de courant. On travaille toujours en coordonnées sphériques avec les vecteurs de base  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$ . Soit M un point quelconque de l'espace, les plans  $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$  et  $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\varphi)$  sont des plans de symétrie de la distribution de courant. Le champ magnétique est alors normal à ces deux plans. Or, ces deux plans sont perpendiculaires. Le champ magnétique est donc nul :

$$\vec{B}(M, t) = \vec{0}.$$

4) On vérifie alors les quatre équations de Maxwell :

• L'équation de Maxwell-flux est évidente :  $\text{div} \vec{B} = 0$ .

• Vérifions l'équation de Maxwell-Gauss.

Pour  $r > v_0 t$ , on a  $\text{div} \vec{E} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 E)}{\partial r} = 0$  et  $\rho(r, t) = 0$ . On a donc bien :  $\text{div} \vec{E} = \frac{\rho(r, t)}{\epsilon_0}$ .

Pour  $r < v_0 t$ , on a  $\text{div} \vec{E} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 E)}{\partial r} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\alpha e \left( t - \frac{r}{v_0} \right)}{4\pi\epsilon_0} \right) = -\frac{\alpha e}{4\pi\epsilon_0 v_0 r^2}$  et  $\rho(r, t) = -\frac{\alpha e}{4\pi v_0 r^2}$ .

On a donc bien :  $\text{div} \vec{E} = \frac{\rho(r, t)}{\epsilon_0}$ .

**L'équation de Maxwell-Gauss est vérifiée dans tout l'espace.**

• En tout point, le champ électrique est dirigé suivant  $\vec{u}_r$  et ne dépend que des variables  $r$  et  $t$ . Donc  $\text{rot} \vec{E} = \vec{0}$ . On a aussi démontré que le champ magnétique est nul en tout point.

Par conséquent, l'équation de Maxwell-Ampère  $\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$  est vérifiée.

• Étudions maintenant l'équation de Maxwell-Ampère.

Pour  $r > v_0 t$ , on a  $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{0}$ ,  $\text{rot} \vec{B} = \vec{0}$  et  $\vec{j}(r, t) = \vec{0}$ . Donc on vérifie :  $\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ .

Pour  $r < v_0 t$ , on a  $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{\alpha e}{4\pi\epsilon_0 v_0 r^2} \vec{u}_r$ ,  $\text{rot} \vec{B} = \vec{0}$  et  $\vec{j}(r, t) = -\frac{\alpha e}{4\pi r^2} \vec{u}_r$ .

On a donc :  $\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ .

**L'équation de Maxwell-Ampère est vérifiée dans tout l'espace.**

5) Pour étudier le bilan énergétique, on vérifie l'équation locale de Poynting.

• Pour  $r > v_0 t$ , on a :

– le vecteur de Poynting  $\vec{R} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \vec{0}$  ;

– l'énergie électromagnétique par unité de volume  $\frac{dW}{dt} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{2\mu_0} = 0$  ;

$$\vec{j} \cdot \vec{E} = 0.$$

On vérifie alors que :  $\text{div} \vec{R} + \vec{j} \cdot \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{dW}{dt} \right) = 0.$

$\{r > v_0 t\}$  correspond au vide en l'absence de champ électromagnétique. Il n'y a donc aucun échange d'énergie.

• Pour  $r < v_0 t$ , on a :

– le vecteur de Poynting  $\vec{R} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \vec{0}$  ;

– l'énergie électromagnétique par unité de volume :

$$\frac{dW}{dt} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 \left( \frac{\alpha e \left( t - \frac{r}{v_0} \right)}{4\pi \epsilon_0 r^2} \right)^2$$

$$\text{donc } \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{dW}{dt} \right) = \frac{\alpha e}{4\pi r^2} \times \frac{\alpha e \left( t - \frac{r}{v_0} \right)}{4\pi \epsilon_0 r^2} ;$$

$$\text{– On a : } \vec{j} \cdot \vec{E} = - \frac{\alpha e}{4\pi r^2} \times \frac{\alpha e \left( t - \frac{r}{v_0} \right)}{4\pi \epsilon_0 r^2} .$$

On vérifie alors que :  $\text{div} \vec{R} + \vec{j} \cdot \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{dW}{dt} \right) = 0.$

Dans le domaine  $\{r < v_0 t\}$ , il n'y a aucun transfert d'énergie par rayonnement électromagnétique ( $\vec{R} = \vec{0}$ ) ; toute l'énergie électromagnétique fournie par le flux d'électron est dissipée par effet Joule.

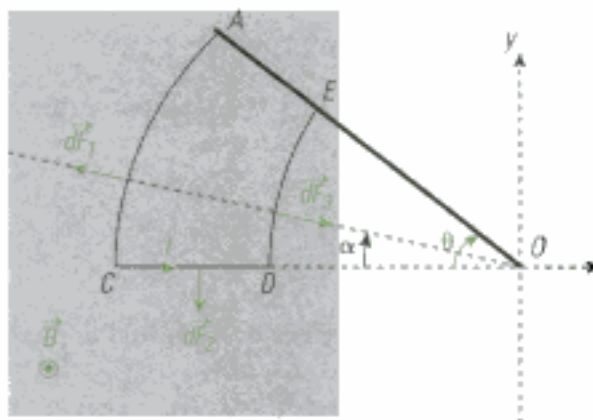
**L'équation locale de Poynting est vérifiée.**

## Exercice 10

1) Le circuit électrique ACDE est parcouru par un courant  $I$  et placé dans un champ magnétique uniforme. Il est soumis aux forces de Laplace qui auront tendance à tirer le circuit vers le bas.

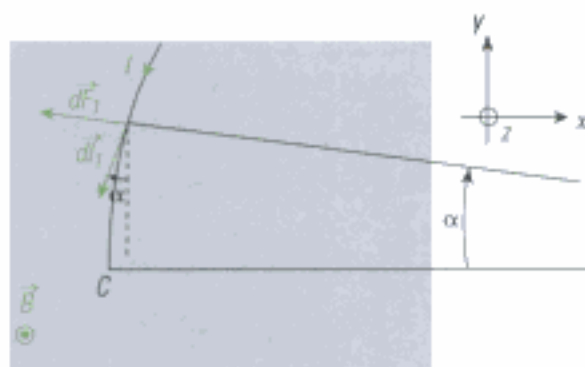
**La balance n'est plus en équilibre.**

2) La force de Laplace qui s'exerce sur le circuit électrique est la somme des forces élémentaires sur chaque portion de circuit placées dans le champ magnétique  $\vec{B}$ , c'est-à-dire sur tout le circuit ACDE.



• La force de Laplace élémentaire exercée en un point de la branche AC repéré par l'angle  $\alpha$  est  $d\vec{F}_1 = I d\vec{l}_1 \wedge \vec{B}$  où  $d\vec{l}_1 = R_2 d\alpha (-\sin \alpha \vec{u}_x - \cos \alpha \vec{u}_y)$  est un élément de longueur orienté dans le sens du courant.





• La force de Laplace élémentaire exercée en un point de la branche CD est  $d\vec{F}_2 = I \overrightarrow{dl_2} \wedge \vec{B}$  où  $\overrightarrow{dl_2} = dx \vec{u}_x$ .

La force de Laplace élémentaire exercée en un point de la branche DE est  $d\vec{F}_3 = I \overrightarrow{dl_3} \wedge \vec{B}$  où  $\overrightarrow{dl_3} = R_1 d\alpha (\sin \alpha \vec{u}_x + \cos \alpha \vec{u}_y)$ .



$$\text{On a } \vec{F}_L = \int_A^C d\vec{F}_1 + \int_C^D d\vec{F}_2 + \int_D^B d\vec{F}_3.$$

$$\text{D'où : } \vec{F}_L = \int_0^\theta IBR_2 (\sin \alpha \vec{u}_y - \cos \alpha \vec{u}_x) d\alpha - \int_{-R_2}^{-R_1} IB dx \vec{u}_y + \int_0^\theta IBR_1 (-\sin \alpha \vec{u}_y + \cos \alpha \vec{u}_x) d\alpha.$$

$$\text{Soit } \vec{F}_L = \int_0^\theta IB(R_2 - R_1)(-\sin \alpha \vec{u}_x - \cos \alpha \vec{u}_y) d\alpha - \int_{-R_2}^{-R_1} IB dx \vec{u}_y.$$

$$\text{On en déduit : } \vec{F}_L = IB(R_2 - R_1)(-\sin \theta \vec{u}_x + (1 - \cos \theta) \vec{u}_y) - IB(R_2 - R_1) \vec{u}_y.$$

$$\text{D'où : } \vec{F}_L = IB(R_2 - R_1)(-\sin \theta \vec{u}_x - \cos \theta \vec{u}_y).$$

3) Le moment en O des forces de Laplace est  $\vec{M}_0 = \int_{ACDE} \overrightarrow{OP} \wedge d\vec{F}(P)$  où P est un point du circuit électrique où s'exerce la force de Laplace  $d\vec{F}(P)$ .

Or, sur les portions AC et DE, la force de Laplace est colinéaire au vecteur  $\overrightarrow{OP}$ , le moment en O des forces de Laplace sur ces deux portions est donc nul.

$$\text{Il reste } \vec{M}_0 = \int_C^D x \vec{u}_x \wedge (-IB dx \vec{u}_y) = \int_{-R_2}^{-R_1} -IB x dx \vec{u}_z.$$

$$\text{On obtient : } \vec{M}_0 = IB \frac{R_2^2 - R_1^2}{2} \vec{u}_z.$$

4) La balance est un système en rotation autour d'un axe passant par O.

L'étude de l'équilibre s'effectue alors en utilisant le théorème du moment cinétique.

Les forces qui s'exercent sur la balance sont les forces de Laplace, dont on connaît le moment en O, et le poids des masses placées sur le plateau qui s'applique sur la balance au point Q (point où est attaché le plateau), dont le moment en O est  $\vec{M}_0' = \overrightarrow{OQ} \wedge m\vec{g} = -m b g \vec{u}_z$ .

La balance est en équilibre, la somme des moments en O des forces qui s'exercent sur celle-ci est donc nulle :

$$\vec{M}_0 + \vec{M}_0' = I B \frac{R_2^2 - R_1^2}{2} \vec{u}_z - m b g \vec{u}_z = \vec{0}.$$

On en déduit :

$$m = I B \frac{R_2^2 - R_1^2}{2 g b}.$$



On voit ici l'ingéniosité du dispositif qui consiste à prendre des portions d'arc de cercle de centre O. Ceci permet d'obtenir une condition d'équilibre indépendante de la longueur des portions d'arc contenues dans l'espace où règne le champ magnétique.

5) L'équation précédente donne :  $B = \frac{2 m g b}{I (R_2^2 - R_1^2)}.$

D'où

$$B = 0,8 \text{ T}.$$

## Exercice 11

1) Le couple exercé sur la pièce mobile est  $\vec{\Gamma}(t) = \vec{M} \wedge \vec{B}$ . Or le champ magnétique est un champ de la forme  $\vec{B} = B_0 (\cos(\omega_0 t) \vec{u}_x + \sin(\omega_0 t) \vec{u}_y)$  que l'on appelle aussi champ tournant et le moment magnétique en rotation s'écrit  $\vec{M} = M (\cos(\omega t - \alpha) \vec{u}_x + \sin(\omega t - \alpha) \vec{u}_y)$  du fait des conditions initiales :  $\alpha = (\vec{M}, \vec{B})$  à l'instant initial.

D'où :  $\vec{\Gamma}(t) = M B_0 [\cos(\omega t - \alpha) \sin(\omega_0 t) - \sin(\omega t - \alpha) \cos(\omega_0 t)] \vec{u}_z.$

Comme  $\cos(\omega t - \alpha) \sin(\omega_0 t) - \sin(\omega t - \alpha) \cos(\omega_0 t) = \sin((\omega_0 - \omega)t + \alpha)$ , il vient :

$$\vec{\Gamma}(t) = M B_0 \sin((\omega_0 - \omega)t + \alpha) \vec{u}_z.$$

On en déduit :

- $\langle \vec{\Gamma} \rangle = \vec{0}$  lorsque  $\omega \neq \omega_0$ . L'aimant ne reçoit donc aucune puissance mécanique.
- $\langle \vec{\Gamma} \rangle = M B_0 \sin(\alpha) \vec{u}_z$  lorsque  $\omega = \omega_0$ . L'aimant est donc entraîné en rotation à la pulsation  $\omega_0$ .

2) • Si on considère la vitesse de rotation positive et constante, la puissance mécanique moyenne fournie est :  $P_m = \langle \Gamma \omega_0 \rangle = \langle \Gamma \rangle \omega_0.$

Le dispositif fonctionne en moteur si le champ tournant fournit de la puissance mécanique à l'aimant. Il faut donc que la valeur moyenne du couple soit positive (si on considère la vitesse de rotation positive).

On en déduit :  $\omega = \omega_0$  et  $\alpha \in [0, \pi]$ .

• Ce moteur est appelé moteur synchrone du fait que l'aimant tourne à la même pulsation que le champ magnétique. On dit aussi que l'aimant tourne au synchronisme.

- L'angle  $\alpha$  est compris entre 0 et  $\pi$ , c'est-à-dire que l'aimant se trouve après le champ magnétique. **L'aimant suit donc le champ magnétique.**
- La puissance maximale que peut fournir le moteur est obtenue lorsque le couple est maximal, c'est-à-dire pour  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  et elle vaut :  $P_m = \langle \Gamma \rangle_{\max} \omega_0 = MB_0 \omega_0$ .
- **La source d'énergie est la source du champ magnétique tournant.**

## Exercice 12

1) Le champ magnétique créé par le solénoïde infini est :

$$\vec{B} = \begin{cases} \mu_0 n I_0 \cos(\omega t) \vec{u}_z & \text{à l'intérieur du solénoïde} \\ \vec{0} & \text{à l'extérieur du solénoïde} \end{cases}$$

où  $\vec{u}_z$  est le vecteur directeur de l'axe du solénoïde.



Ce résultat est vu en première année. On pourra notamment trouver la démonstration de cette expression dans la méthode n° 2 du chapitre « Le champ magnétique » du livre de première année MPSI.

2) • Le champ magnétique est dépendant du temps. Donc  $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$  est non nul. L'équation de Maxwell-Faraday permet d'en déduire qu'il existe un champ électrique tel que  $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ .

• Afin de déterminer le champ électrique, on étudie les symétries et invariances du dispositif. Le solénoïde possède une symétrie cylindrique. On utilise donc les coordonnées cylindriques et la base associée  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$  où  $\vec{u}_z$  est le vecteur directeur de l'axe du solénoïde.

Si on considère un point M de l'espace, le plan  $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ , noté  $\pi_1$  sur la figure, est un plan d'antisymétrie du solénoïde pour les sources de champ électromagnétique (ici les courants). Donc le champ électrique est normal à ce plan soit  $\vec{E}(M, t) = E(M, t) \vec{u}_\theta$ .

Le solénoïde est invariant par translation selon son axe et par rotation d'angle  $\theta$ . Donc le champ électrique est indépendant des variables  $\theta$  et  $z$ . On en conclut que  $\vec{E}(M, t) = E(z, t) \vec{u}_\theta$ .

• Il reste à trouver un point particulier où le champ électrique nous est connu. Tous les plans contenant l'axe du solénoïde sont plans d'antisymétrie.

Or le champ électrique sur l'axe (Oz) ne peut être orthogonal à tous ces plans : il est donc nul en tout point M de l'axe du solénoïde :  $\vec{E}(r=0, t) = \vec{0}$ .

• On a  $\text{rot } \vec{E} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [rE(r)] \vec{u}_\theta = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \mu_0 n I_0 \omega \sin(\omega t) \vec{u}_z$ .

On trouve alors :

$$rE(r) = \mu_0 n I_0 \omega \sin(\omega t) \frac{r}{2} + K \text{ où } K \text{ est une constante d'intégration.}$$

$E(r=0) = 0$  donne donc :  $K = 0$ .

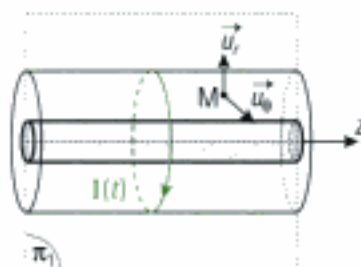
Ceci conduit à :  $\vec{E}(r, t) = \mu_0 n I_0 \omega \sin(\omega t) \frac{r}{2} \vec{u}_\theta$ .

3) D'après la loi d'Ohm, on a  $\vec{j} = \gamma \vec{E}$ , d'où :

$$\vec{j}(r, t) = \gamma \mu_0 n I_0 \omega \sin(\omega t) \frac{r}{2} \vec{u}_\theta$$

4) On met en œuvre la méthode n° 5.

La puissance volumique dissipée par effet Joule est donné par  $\vec{j} \cdot \vec{E}$ .





Donc la puissance  $P_J$  dissipée dans le conducteur est l'intégrale sur le volume  $V$  du conducteur de ce produit scalaire :

$$P_J = \iiint_V \vec{j} \cdot \vec{E} \, d\tau,$$

où  $d\tau = r dr d\theta dz$  est un élément de volume du conducteur en coordonnées cylindriques.

Donc :

$$P_J = \iiint_V \gamma \left( \mu_0 n I_0 \omega \sin(\omega t) \frac{r}{2} \right)^2 r dr d\theta dz = \gamma \left( \frac{\mu_0 n I_0 \omega \sin(\omega t)}{2} \right)^2 \int_0^a r^3 dr \times \int_0^{2\pi} d\theta \times \int_0^L dz.$$

On obtient :

$$P_J = \frac{\gamma}{8} \pi L a^4 [\mu_0 n I_0 \omega \sin(\omega t)]^2.$$

5) On met en œuvre la méthode n° 4.

• Le champ magnétique variable  $\vec{B}'$  est le champ magnétique créé par la densité de courant volumique présente dans le conducteur.

Il est obtenu à partir de l'équation de Maxwell-Ampère  $\vec{\text{rot}} \vec{B}' = \mu_0 \vec{j}$ .



On se place ici dans l'ARQS car les courants sont de basse fréquence. Le terme du courant de déplacement

$\vec{j}_0 = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  est donc évincé de l'équation de Maxwell-Ampère.

• Si on considère un point  $M$  de l'espace, le plan  $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ , noté  $\pi_2$  sur la figure, est un plan de symétrie pour la distribution de courant, si on considère  $L$  très grand. Donc le champ magnétique est normal à ce plan, soit  $\vec{B}'(M, t) = B'(M, t) \vec{u}_z$ .

La distribution de courant volumique  $\vec{j}$  est invariante par translation selon son axe et par rotation d'angle  $\theta$  (on considère toujours  $L$  très grand). Donc le champ magnétique est indépendant des variables  $\theta$  et  $z$ . On en conclut que  $\vec{B}'(M, t) = B'(r, t) \vec{u}_z$ .

• Enfin, on utilise l'équation de Maxwell-Ampère que l'on écrit dans le conducteur ( $r \leq a$ ). On a :

$$\vec{\text{rot}} \vec{B}' = \mu_0 \vec{j} \text{ d'où } \vec{\text{rot}} \vec{B}' = - \frac{\partial B'(r)}{\partial r} \vec{u}_\theta = \mu_0^2 \gamma n I_0 \omega \sin(\omega t) \frac{r}{2} \vec{u}_\theta.$$

On obtient :

$$B'(r) = \mu_0^2 \gamma n I_0 \omega \sin(\omega t) \frac{r^2}{4} + K' \text{ où } K' \text{ est une constante d'intégration.}$$

La distribution de courant est à répartition volumique donc le champ magnétique est continu à l'interface  $r = a$  avec l'extérieur du conducteur où le champ magnétique  $\vec{B}'$  est nul.

$$\text{On obtient donc } K' = - \mu_0^2 \gamma n I_0 \omega \sin(\omega t) \frac{a^2}{4}.$$



À l'extérieur du conducteur ( $r > a$ ),  $\vec{j} = \vec{0}$  et on a donc :

$$\begin{cases} \vec{\text{rot}} \vec{B}' = \vec{0} \\ \text{div} \vec{B}' = 0 \end{cases}$$

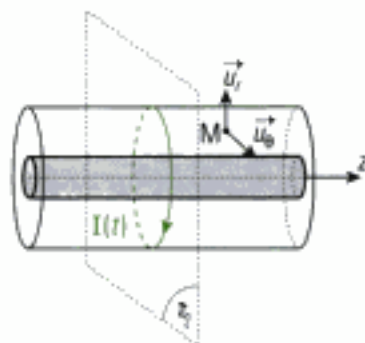
On obtient alors  $\vec{B}' = \text{Cte}$ , constante que l'on choisit nulle en supposant qu'il n'y a pas de champ permanent.

$$\text{On trouve alors : } \vec{B}'(r) = \mu_0^2 \gamma n I_0 \omega \sin(\omega t) \frac{(r^2 - a^2)}{4} \vec{u}_z.$$

6) On calcule le rapport des amplitudes :

$$\frac{\text{Amplitude de } B'(r)}{\text{Amplitude de } B(r)} = \frac{\mu_0^2 \gamma n I_0 \omega \frac{|r^2 - a^2|}{4}}{\mu_0 n I_0} = \frac{|r^2 - a^2|}{\frac{4}{\mu_0 \gamma \omega}} = \frac{|r^2 - a^2|}{\delta^2},$$

où  $\delta = \sqrt{\frac{2}{\gamma \mu_0 \omega}}$  est l'épaisseur de peau.



Le champ magnétique  $\vec{B}$  créé par la densité de courant volumique a une amplitude qui croît lorsque l'on pénètre dans le conducteur.

Pour un mauvais conducteur ( $\gamma$  petit), l'épaisseur de peau est grande et le champ magnétique  $\vec{B}$  créé par le solénoïde pénètre bien dans le conducteur et est prépondérant.

Pour un bon conducteur (notamment lorsque  $\delta \ll a$ ), la présence du cylindre dans le solénoïde modifie fortement le champ magnétique et ce dernier a du mal à pénétrer à l'intérieur du conducteur. C'est donc le champ  $\vec{B}$  créé par la densité de courant volumique  $\vec{j}$  qui devient prépondérant à l'intérieur du cylindre conducteur.

### Exercice 13

1) En tout point M du conducteur, les équations locales  $\vec{j} = \gamma \vec{E}$  et  $\text{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$  sont vérifiées.

On a donc  $\gamma \text{div} \vec{E}(M, t) + \frac{\partial \rho}{\partial t}(M, t) = 0$ , et, comme  $\text{div} \vec{E}(M, t) = \frac{\rho(M, t)}{\epsilon_0}$  (équation de Maxwell-Gauss), on en déduit :

$$\frac{\gamma}{\epsilon_0} \rho(M, t) + \frac{\partial \rho}{\partial t}(M, t) = 0.$$

C'est une équation différentielle du premier degré qui se résout sous la forme :

$$\rho(M, t) = \rho_0 e^{-\frac{t}{\tau}}, \text{ avec } \tau = \frac{\epsilon_0}{\gamma}.$$

Or, à  $t = 0$ , on a  $\rho = 0$  (conducteur non chargé), donc  $\rho_0 = 0$ , soit  $\rho(M, t) = 0$ .

2) On met en œuvre la méthode n° 4.

- La distribution de charges est à symétrie sphérique, on utilisera donc les coordonnées sphériques et les vecteurs de base associés  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$ .

- On cherche à déterminer en premier le champ électrique puisque l'on a une distribution de charges fixes à l'instant initial. On étudie les symétries et invariances du champ électrique en un point M de l'espace conducteur. Les plans  $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$  et  $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\varphi)$  sont des plans de symétrie pour la distribution de charge. Donc le champ électrique est porté par la direction de la droite intersection des deux plans.  $\vec{E}$  est dirigé selon  $\vec{u}_r$ .

La distribution de charge est invariante par les rotations d'angle  $\theta$  et  $\varphi$ . Le champ électrique n'est alors fonction que de la variable  $r$ .

Donc :  $\vec{E}(M, t) = E(r, t) \vec{u}_r$ .

- Afin d'établir l'expression du champ électrique, on utilise le théorème de Gauss sur une surface  $S$  à  $r$  constant, c'est-à-dire une sphère :

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}.$$

Or, l'élément de surface est orienté suivant  $\vec{u}_r$ , donc  $\vec{E} \cdot d\vec{S} = E(r) dS$  où  $E(r)$  est constant sur la surface d'intégration.

D'où  $\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_S E(r) dS = E(r) \oint_S dS = E(r) S = \frac{Q(t)}{\epsilon_0}$  où  $S = 4\pi r^2$  et  $Q(t)$  est la charge de l'armature de rayon  $a$ .

On en déduit :  $\vec{E}(a < r < b) = \frac{Q(t)}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$ .

- Le champ électrique est dirigé selon  $\vec{u}_r$  et ne dépend que de  $r$ . Donc  $\vec{\text{rot}} \vec{E} = \vec{0}$ .

Ce qui conduit, d'après l'équation de Maxwell-Faraday, à  $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0}$ .

Comme il n'existe aucun champ statique, on obtient :  $\vec{B}(a < r < b) = \vec{0}$ .

3) On met en œuvre la méthode n° 5.

- La puissance électromagnétique rayonnée par le système correspond au flux du vecteur de Poynting à travers la surface fermée entourant le volume du conducteur.

Or le champ magnétique est nul à l'intérieur du conducteur et sur l'interface puisqu'il n'y a pas de courant surfacique. Il en est donc de même du vecteur de Poynting.

On en conclut qu'**aucune puissance électromagnétique n'est rayonnée par le système.**

- Le bilan énergétique local est représenté par l'équation locale de Poynting qui s'écrit :

$$\operatorname{div} \vec{R} + \vec{j} \cdot \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{dW}{dt} \right) = 0 \quad \text{où} \quad \frac{dW}{dt} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{\epsilon_0}{2} \left( \frac{Q(t)}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right)^2.$$

On calcule  $\operatorname{div} \vec{R} = 0$  et  $\vec{j} \cdot \vec{E} = \gamma E^2 = \gamma \left( \frac{Q(t)}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right)^2$ .

On obtient alors  $\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{dW}{dt} \right) = -\operatorname{div} \vec{R} - \vec{j} \cdot \vec{E} = -\gamma \left( \frac{Q(t)}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right)^2 = \frac{\epsilon_0}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{Q(t)}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{dQ(t)}{dt}$ .

Ceci s'écrit aussi sous la forme d'une équation différentielle traduisant le bilan énergétique en tout point du conducteur :  $\frac{dQ(t)}{dt} = -\frac{\gamma}{\epsilon_0} Q(t)$ .

4) On en déduit l'expression de  $Q(t)$  qui est  $Q(t) = Q_0 e^{-\frac{\gamma}{\epsilon_0} t}$ .

5) On met en œuvre la méthode n° 5.

- La puissance dissipée par effet Joule est  $P_J = \iiint_{\tau} \vec{j} \cdot \vec{E} \, d\tau$  où  $\tau$  représente le volume du conducteur compris entre les armatures et  $d\tau$  est un élément de volume de ce conducteur.

Donc  $P_J = \iiint_{\tau} \vec{j} \cdot \vec{E} \, d\tau = \iiint_{\tau} \gamma \left( \frac{Q(t)}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right)^2 r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\varphi$ .

D'où  $P_J = \gamma \left( \frac{Q(t)}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \int_a^b \frac{dr}{r^2} \int_0^\pi \sin\theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{\gamma}{4\pi} \left( \frac{Q(t)}{\epsilon_0} \right)^2 \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$ .

Si on remplace  $Q(t)$  par son expression, on obtient  $P_J = \gamma \frac{Q_0^2}{4\pi\epsilon_0^2} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) e^{-2\frac{\gamma}{\epsilon_0} t}$ .

- La puissance électromagnétique cédée par le champ est  $P_{em} = -\frac{\partial}{\partial t} \left( \iiint_{\tau} \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \, d\tau \right)$  où  $d\tau$  représente le volume du conducteur compris entre les armatures et  $d\tau$  est un élément de volume de ce conducteur.

Donc  $P_{em} = -\frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\epsilon_0}{2} \left( \frac{Q(t)}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \int_a^b \frac{dr}{r^2} \int_0^\pi \sin\theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \right] = -\frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{1}{2} \frac{[Q(t)]^2}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \right]$ .

Si on remplace  $Q(t)$  par son expression, on obtient  $P_{em} = \gamma \frac{Q_0^2}{4\pi\epsilon_0^2} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) e^{-2\frac{\gamma}{\epsilon_0} t}$ .

On retrouve le bilan de puissance. La puissance électromagnétique cédée au conducteur est transformée en puissance thermique par effet Joule :  $P_J = P_{em}$ .

- L'énergie dissipée par effet Joule entre les instants  $t = 0$  et  $t = +\infty$  est  $W_J = \int_0^{+\infty} P_J \, dt$ .

$W_J = \gamma \frac{Q_0^2}{4\pi\epsilon_0^2} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \int_0^{+\infty} e^{-2\frac{\gamma}{\epsilon_0} t} \, dt$ .

On a alors :  $W_J = \frac{Q_0^2}{8\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$ .

- De même, on trouve que l'énergie électromagnétique cédée par le champ au conducteur est :

$$W_{em} = \frac{Q_0^2}{8\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right).$$



## Exercice 14

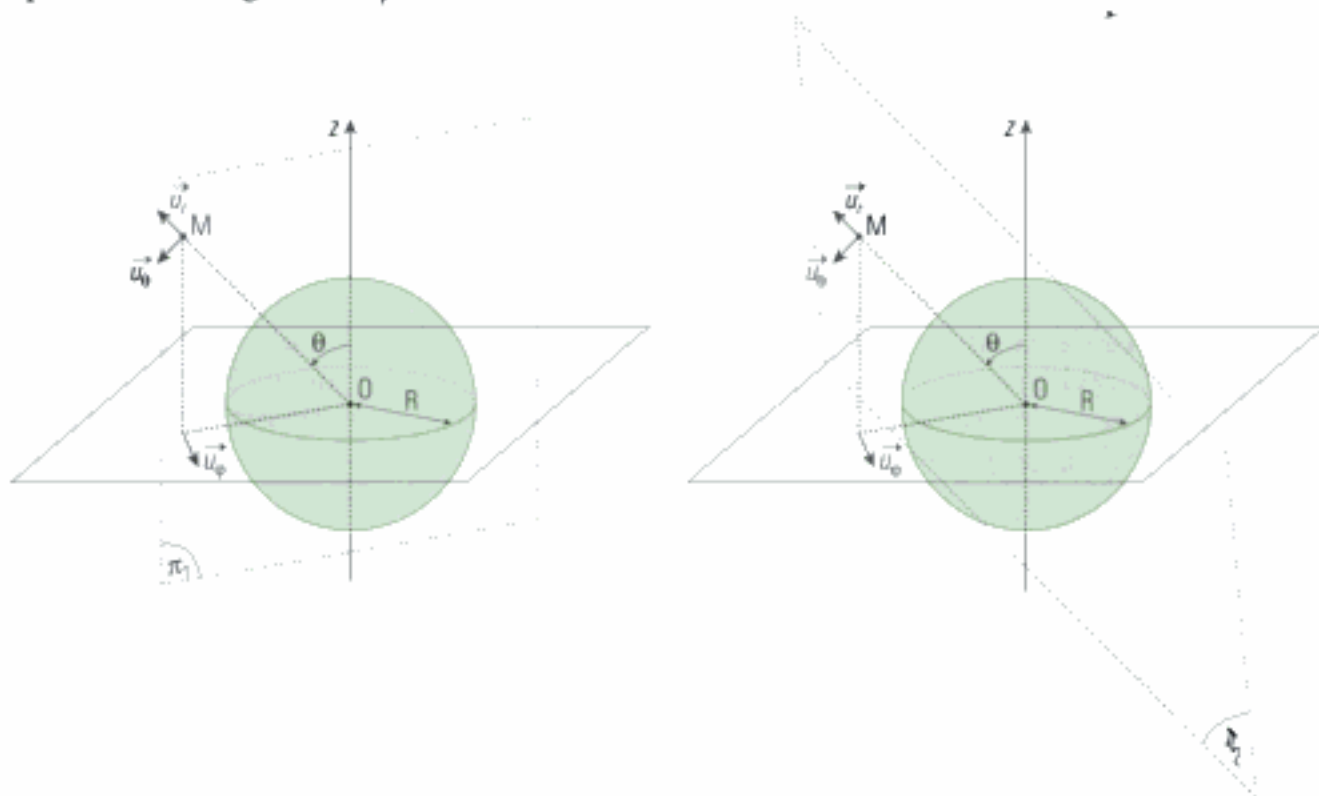
1) Afin de déterminer la charge, on calcule le potentiel en fonction de  $Q_A$ .

La sphère A est isolante, elle ne peut donc être chargée que superficiellement. On suppose alors que la charge  $Q_A$  est répartie de façon uniforme sur la surface de rayon  $R_1$ .

Pour cela, on utilise le théorème de Gauss qui permet d'établir l'expression du champ électrique dont on va déduire le potentiel.

• La distribution de charges est à symétrie sphérique, on utilisera donc les coordonnées sphériques et les vecteurs de base associés  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$ .

En premier lieu, on étudie les symétries et invariances du champ électrique en un point M de l'espace. Les plans  $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$  et  $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\varphi)$  sont des plans de symétrie pour la distribution de charges. Le champ électrique est donc porté par la direction de la droite intersection des deux plans.  $\vec{E}$  est dirigé selon  $\vec{u}_r$ .



• La distribution de charge est invariante par les rotations d'angle  $\theta$  et  $\varphi$ . Le champ électrique n'est alors fonction que de la variable  $r$ .

D'où : 
$$\vec{E}(\mathbf{M}) = E(r) \vec{u}_r.$$

On va appliquer le théorème de Gauss en prenant une surface S de Gauss sphérique de rayon  $r$ .

► Pour  $r < R_1$ , on a :  $\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$ .

Or l'élément de surface est orienté suivant  $\vec{u}_r$ , donc  $\vec{E} \cdot d\vec{S} = E(r) dS$  où  $E(r)$  est constant sur la surface d'intégration.

D'où :  $\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_S E(r) dS = E(r) \int_S dS = E(r) S = 0$  où  $S = 4\pi r^2$ .

On en déduit : 
$$\vec{E}(r < R_1) = \vec{0}.$$

► Pour  $r > R_1$ , on a :  $\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_A}{\epsilon_0}$ .

Or l'élément de surface est orienté suivant  $\vec{u}_r$ , donc  $\vec{E} \cdot d\vec{S} = E(r) dS$  où  $E(r)$  est constant sur la surface d'intégration.

D'où : 
$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_S E(r) dS = E(r) \iint_S dS = E(r) S = \frac{Q_A}{\epsilon_0} \text{ où } S = 4\pi r^2.$$

On en déduit : 
$$\vec{E}(r > R_1) = \frac{Q_A}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r.$$

⚠ On remarque que, pour  $r > R_1$ , le champ électrique est le même que celui engendré par une charge ponctuelle disposée en O.

• On détermine la différence de potentiel entre la sphère et l'infini (au potentiel nul) en calculant la circulation du champ électrique :

$$V - V_\infty = \int_{\infty}^{R_1} dV = \int_{\infty}^{R_1} \overrightarrow{\text{grad}} V \cdot d\vec{l} = \int_{R_1}^{+\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l}, \text{ où } d\vec{l} = dr \vec{u}_r, \text{ puisque l'on se déplace dans le sens des rayons croissants.}$$

On obtient 
$$V = \int_{R_1}^{+\infty} \frac{Q_A}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \left[ -\frac{Q_A}{4\pi\epsilon_0 r} \right]_{R_1}^{+\infty} = \frac{Q_A}{4\pi\epsilon_0 R_1}.$$

D'où : 
$$Q_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R_1 V}.$$

2)a) La sphère B est isolante, sa charge reste donc nulle :  $Q_B = 0$ .

**Mais les surfaces interne et externe de B s'électrisent.** En effet, s'il n'y avait aucune densité surfacique de charges sur les parois de B, le champ électrique ne serait plus nul dans B, car ce serait celui, non nul, créé par A. Or ceci est en contradiction avec l'hypothèse de matière isolante qui constitue la calotte sphérique B, on doit avoir :  $\vec{E}(R_2 < r < R_3) = \vec{0}$ .

Si on applique le théorème de Gauss en un point de l'intérieur du conducteur B, alors la surface de Gauss est une sphère et le flux du champ électrique vaut  $\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0 = \frac{Q_A + Q_{B,int}}{\epsilon_0}$ . En effet,

le champ est nul en tout point de la sphère de Gauss car elle est à l'intérieur du conducteur B, la charge qu'elle contient est celle de A et celle de la face interne de B.

Les sphères A et B sont en influence totale, donc :  $Q_{B,int} = -Q_A$ .

La charge  $Q_{B,ext} = Q_A$  apparaît sur la surface externe du conducteur, la charge totale de B étant nulle.

Par le même calcul qu'à la question 1) (théorème de Gauss), on détermine le champ électrique :

$$\vec{E}(r > R_3) = \frac{Q_A}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r,$$

puis le potentiel de la sphère B de rayon extérieur  $R_3$  :  $V_B = \frac{Q_A}{4\pi\epsilon_0 R_3}.$

2)b) Pour obtenir le potentiel  $V'$  de la sphère A, on détermine la différence de potentiel aux bornes des armatures A et B :  $V' - V_B = \int_{R_1}^{R_2} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{R_1}^{R_2} \vec{E} \cdot d\vec{l}$ , où  $d\vec{l} = dl \vec{u}_r$ , car  $\vec{E} = \vec{0}$  à l'intérieur de B.

Or  $\vec{E}(R_1 < r < R_2) = \frac{Q_A}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$ , puisque le calcul de la question 1) n'est pas modifié par la présence de la sphère B.

D'où : 
$$V' - V_B = \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q_A}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \left[ -\frac{Q_A}{4\pi\epsilon_0 r} \right]_{R_1}^{R_2} = \frac{Q_A}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = \frac{Q_A (R_2 - R_1)}{4\pi\epsilon_0 R_1 R_2}.$$

On en déduit :  $V' = V_B + \frac{Q_A (R_2 - R_1)}{4\pi\epsilon_0 R_1 R_2} = \frac{Q_A}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R_3} + \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2} \right)$  (1).

2)c) Le potentiel est constant dans un conducteur en équilibre, donc  $V(x < R_1) = V'$  et  $V(R_2 < x < R_3) = V_B$ .

Le champ électrique est nul dans un conducteur à l'équilibre, d'où  $E(x < R_1) = 0$  et  $E(R_2 < x < R_3) = 0$ .

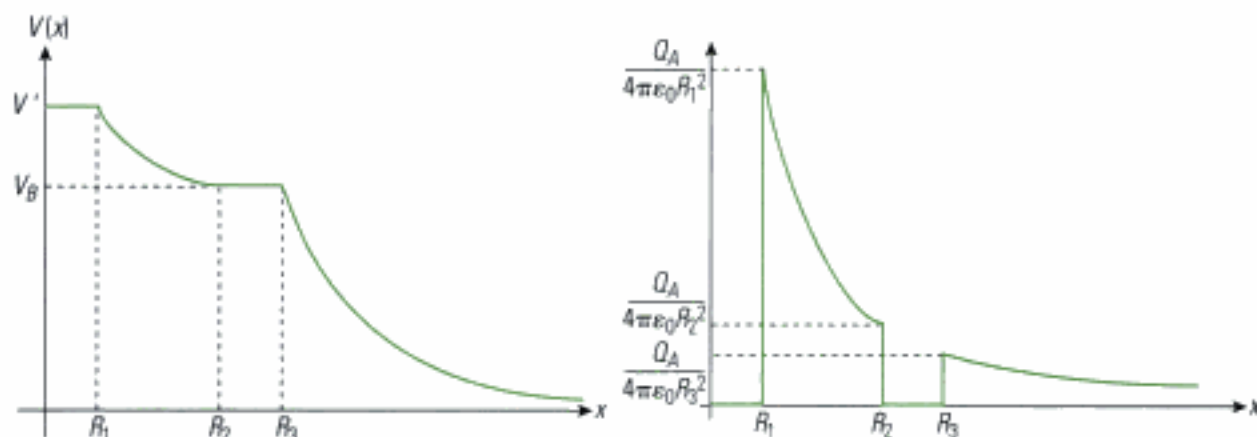
En utilisant les résultats précédents et le même type de raisonnement, on obtient :

► Pour  $x > R_3$ ,  $\vec{E}(x) = \frac{Q_A}{4\pi\epsilon_0 x^2} \vec{u}_r$ , et  $V(x) = \int_x^{+\infty} \frac{Q_A}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \left[ -\frac{Q_A}{4\pi\epsilon_0 r} \right]_x^{+\infty} = \frac{Q_A}{4\pi\epsilon_0 x}$ .

► Pour  $R_1 < x < R_2$ ,  $\vec{E}(x) = \frac{Q_A}{4\pi\epsilon_0 x^2} \vec{u}_r$ , et  $V(x) - V_B = \int_x^{R_2} \frac{Q_A}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{Q_A}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{R_2} \right)$ .

D'où  $V(x) = V_B + \frac{Q_A}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{R_2} \right) = \frac{Q_A}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{x} + \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2} \right)$ .

On obtient :



⚠ On voit ici que le potentiel électrique est toujours une fonction continue alors que le champ électrique peut connaître des discontinuités.

3) Si la sphère B est reliée au sol, son potentiel est nul.

On en conclut, d'après l'expression (1), que :  $V'' = \frac{Q_A (R_2 - R_1)}{4\pi\epsilon_0 R_1 R_2}$ .

💡 Le potentiel de la sphère B est nul. On en déduit que la charge de la surface extérieure de la sphère est nulle. Or B est chargée sur sa surface intérieure. Le conducteur n'est donc plus globalement neutre. Le conducteur a perdu des charges qu'il a cédées à la Terre.

## Exercices de niveau 3

### Exercice 15

1. a) L'équation du mouvement du porteur de charges vient de l'application de la deuxième loi de Newton.



Le porteur de charge placé en un point  $M$  est soumis uniquement à la force électrique  $\vec{F}_e(M, t) = e\vec{E}(M, t)$  d'après l'énoncé.

D'après le principe fondamental de la dynamique, l'équation du mouvement du porteur de charge est :

$$m \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}(M, t) = e\vec{E}(M, t) \quad (1)$$

b) La densité volumique de charges mobiles est donné par  $\rho(M, t) = ne$ .

Par définition, les porteurs de charges mobiles au point  $M$  sont représentés par une densité de courant volumique notée  $\vec{j}(M, t)$  telle que  $\vec{j}(M, t) = \rho(M, t)\vec{v}(M, t) = ne\vec{v}(M, t)$ .

On peut remplacer  $\vec{v}(M, t)$  par  $\vec{v}(M, t) = \frac{\vec{j}(M, t)}{ne}$  dans l'équation (1).

On trouve alors :

$$\frac{m}{ne^2} \frac{\partial \vec{j}}{\partial t}(M, t) = \vec{E}(M, t) \quad (2).$$

On en déduit l'expression de  $\lambda$  :

$$\lambda = \sqrt{\frac{m}{\mu_0 ne^2}}.$$

c) Soit  $[L]$  l'unité de la longueur et  $[T]$  celle du temps.

$\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \Rightarrow [B][L]^{-1} = [\mu_0][j]$  (1'), car l'opérateur rotationnel correspond à une dérivation spatiale.

$$\vec{E} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) \Rightarrow [E] = [B][L][T]^{-1} \quad (2')$$

$$\begin{aligned} \vec{E} = \mu_0 \lambda^2 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} \Rightarrow [\lambda^2] &= \frac{[E]}{[\mu_0] \left[ \frac{\partial j}{\partial t} \right]} = \frac{[E][T]}{[\mu_0][j]} = \frac{[E][T][L]}{[B]} \quad \text{d'après (1')} \\ &= [L]^2 \quad \text{d'après (2')} \end{aligned}$$

On en déduit que  $\lambda$  est homogène à une longueur.

d) Pour l'aluminium, on trouve  $\lambda = 12 \text{ nm}$ .

2) a) Dans l'ARQS, les équations de Maxwell s'écrivent :

$$\text{div} \vec{E} = 0 ; \quad \vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} ; \quad \text{div} \vec{B} = 0 \quad \text{et} \quad \vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}.$$

b) On met en œuvre la méthode n° 1 :

On calcule  $\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}} \vec{B}) : \vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}} \vec{B}) = \mu_0 \vec{\text{rot}} \vec{j}$ .

Afin d'utiliser l'équation (2), on dérive par rapport au temps :  $\frac{\partial}{\partial t} [\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}} \vec{B})] = \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} [\vec{\text{rot}} \vec{j}]$ .

$$\frac{\partial}{\partial t} [\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}} \vec{B})] = \mu_0 \vec{\text{rot}} \left( \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} \right) = \frac{1}{\lambda^2} \vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{1}{\lambda^2} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

On trouve donc :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}} \vec{B}) + \frac{\vec{B}}{\lambda^2} \right) = \vec{0}. \quad (3)$$

3) On sait que  $\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}} \vec{B}) = \text{grad}(\text{div} \vec{B}) - \Delta \vec{B}$  et  $\text{div} \vec{B} = 0$ .

On déduit facilement de l'équation (3) :

$$\Delta \vec{B} - \frac{\vec{B}}{\lambda^2} = \vec{0}. \quad (4)$$

4) a) On se place ici en régime stationnaire :  $\vec{B} = B(M)$ . De plus, pour des raisons de symétrie, on prendra l'expression :  $\vec{B} = B(z)\vec{u}_z$ . Si on injecte cette formule dans l'équation (4), on trouve que

$B(z)$  est solution de l'équation différentielle  $\frac{d^2 B(z)}{dz^2} - \frac{B(z)}{\lambda^2} = 0$ .

La solution est donc de la forme :  $\mathbf{B}(z) = \mathbf{A}e^{-\frac{z}{\lambda}} + \mathbf{D}e^{\frac{z}{\lambda}}$ .

b) À l'interface, il y a continuité du champ magnétique puisqu'il n'y a pas de courant surfacique. Donc  $\mathbf{B}(z=0) = \mathbf{B}_0 = \mathbf{A} + \mathbf{D}$ .

De plus, le champ magnétique ne peut diverger quand on s'enfonce dans le matériau supraconducteur :  $\lim_{z \rightarrow -\infty} \mathbf{B}(z) \neq +\infty$ , cela impose donc  $\mathbf{A} = 0$ .

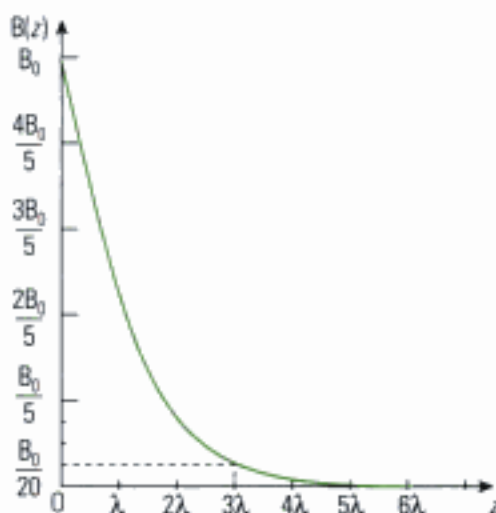
c) On obtient :  $\mathbf{B}(z) = \mathbf{B}_0 e^{\frac{z}{\lambda}}$ .

d) Sur une distance de  $3\lambda$ , le champ magnétique est inférieur à 5 % du champ à la surface. Sur une distance de  $5\lambda$ , il est inférieur à 1 % du champ initial et peut donc être considéré comme nul.

$\lambda$  représente une distance caractéristique de variation du champ magnétique dans le matériau, ou encore l'épaisseur de peau.

e) Le matériau supraconducteur fait écran au champ magnétique (effet Meissner).

Le champ magnétique dans le supraconducteur, et donc le vecteur densité de courant, peuvent être considérés comme nuls dès que  $z < -5\lambda$ , soit  $|z| > 5\lambda$ ,  $|z|$  représentant la profondeur de pénétration dans le matériau. Cette épaisseur est très faible. Donc ce courant peut être assimilé à un courant surfacique.



## Exercice 16

1) Le schéma électrique est celui d'un condensateur en série avec une résistance connectés à un générateur de tension  $U$  constante. Par application de la loi des mailles, on obtient l'équation différentielle dont  $q(t)$  est solution :

$$U = u_R + u_C = Ri + \frac{q(t)}{C} = R \frac{dq(t)}{dt} + \frac{q(t)}{C},$$

d'où :  $RC \frac{dq(t)}{dt} + q(t) = CU$ .

La solution de cette équation différentielle est la somme de :

- La solution de l'équation sans second membre de la forme  $q_1(t) = Ae^{-\frac{t}{RC}}$  où  $A$  est une constante.
- La solution particulière de l'équation avec second membre de la forme  $q_2(t) = CU$ .

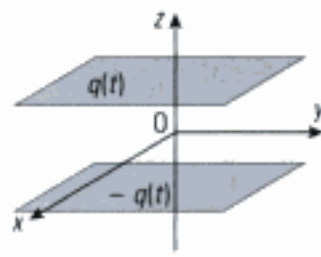
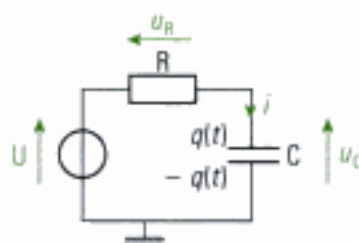
Le condensateur étant initialement déchargé ( $q(t=0) = 0$ ), on détermine ainsi la constante  $A$ . On trouve  $A = -CU$ .

On a donc : **pour  $t > 0$ ,  $q(t) = CU(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$ .**

2) Afin de déterminer le champ électrique entre les armatures, on utilise le théorème de Gauss.

On étudie tout d'abord les invariances et les symétries. Pour cela, on introduit un repère cartésien puisque les armatures sont considérées comme des plans infinis. L'axe  $(Oz)$  est l'axe perpendiculaire aux deux armatures et les armatures sont des plans parallèles au plan  $(Oxy)$ .

Les armatures sont uniformément chargées et peuvent être considérées comme des plans infinis donc elles sont invariantes par les



translations selon les axes (Ox) et (Oy). Le champ électrique est donc indépendant des variables  $x$  et  $y$ .

Soit un point M quelconque entre les armatures, les plans  $\pi_1 = (Myz)$  et  $\pi_2 = (Mxz)$  sont des plans de symétries de la distribution de charges. Donc le champ électrique est dirigé selon l'axe intersection des deux plans, c'est-à-dire l'axe (Oz).

On a donc

$$\vec{E}(M) = E(z)\vec{u}_z.$$

On peut alors appliquer le théorème de Gauss. Pour cela, on définit une surface  $S_C$  de Gauss cylindrique dont les bases sont situées de part et d'autre de l'armature positive comme indiqué sur la figure ci-contre.

$S_1$  représente la section du cylindre qui se trouve en-dehors de l'espace inter-armatures,  $S_2$  représente la section où se trouve le point M d'étude et  $S_l$  représente la surface latérale du cylindre.

On a donc  $\oint_{S_C} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q(t)}{\epsilon_0}$  où  $S_C$  représente la surface fermée du cylindre,  $d\vec{S}$  est un élément de surface du cylindre et  $Q(t)$  est la charge contenue dans le cylindre.

$$\text{Soit : } \oint_{S_C} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \iint_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \iint_{S_l} \vec{E} \cdot d\vec{S}.$$

Or, sur la surface latérale,  $d\vec{S}$  est orthogonal à  $\vec{E}$  donc  $\iint_{S_l} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$ . De plus, le champ électrique est nul sur la surface  $S_1$  donc  $\iint_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$ . Enfin le vecteur  $d\vec{S}$  est colinéaire à  $-\vec{u}_z$  sur la surface  $S_2$  et le champ électrique ne dépend que de la variable  $z$  donc :

$$\iint_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{S} = -E(z)S_2.$$

La surface de l'armature contenue dans le cylindre est identique à la surface  $S_2$  et chargée avec une densité  $\sigma(t)$ . Donc  $Q(t) = \sigma(t)S_2$ .

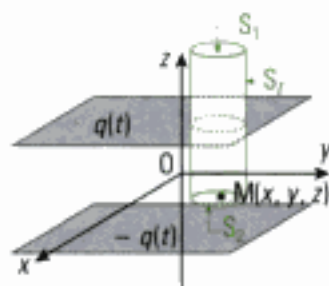
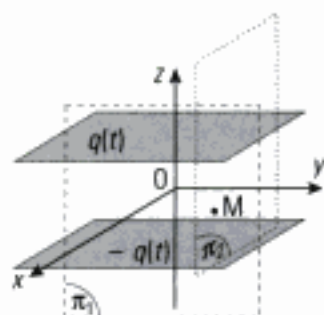
Il reste à déterminer  $\sigma(t)$ . On sait que la charge  $q(t)$  est répartie uniformément sur les armatures cylindriques de surface  $S$ . Donc  $\sigma(t) = \frac{q(t)}{S}$ .

$$\text{D'où : } \oint_{S_C} \vec{E} \cdot d\vec{S} = -E(z)S_2 = \frac{Q(t)}{\epsilon_0} = \frac{q(t)}{\epsilon_0 S} S_2.$$

$$\text{On en déduit : } \vec{E} = -\frac{q(t)}{\epsilon_0 S} \vec{u}_z = -\frac{CU(1 - e^{-\frac{t}{RC}})}{\epsilon_0 S} \vec{u}_z.$$

3) D'après l'équation de Maxwell-Ampère,  $\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ . Or le milieu entre les armatures est isolant parfait, il ne peut donc y avoir de densité de courant :  $\vec{j} = \vec{0}$ . Cependant, le champ électrique dépend du temps donc  $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \neq \vec{0}$ . **Il existe donc un champ magnétique  $\vec{B}$  tel que  $\vec{\text{rot}} \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ . Ce champ magnétique est présent du fait des variations temporelles du champ électrique.**

4) Pour l'étude du champ magnétique, on considère les armatures circulaires. On utilise alors les coordonnées cylindriques.





Soit M un point de l'espace entre les armatures, le plan  $\pi_3 = (M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$  est un plan de symétrie de la distribution et du champ électrique donc le champ magnétique est normal à ce plan.

Les armatures et le champ électrique sont invariant par rotation d'angle  $\theta$ . Le champ magnétique est donc indépendant de l'angle  $\theta$ .

On trouve alors :

$$\vec{B} = B(r, z, t) \vec{u}_\theta.$$

5) L'équation que l'on utilise est l'équation de Maxwell-Ampère en coordonnées cylindriques.

$$\text{rot} \vec{B} = -\frac{\partial B(r, z, t)}{\partial z} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [rB(r, z, t)] \vec{u}_\theta = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\mu_0 \frac{U e^{-\frac{t}{RC}}}{SR} \vec{u}_z.$$

$$\text{On a } \frac{\partial B(r, z, t)}{\partial z} = 0 \text{ et } \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [rB(r, z, t)] = -\mu_0 \frac{U e^{-\frac{t}{RC}}}{SR}.$$

On en déduit que B est indépendant de z et que :

$$rB(r, t) = -\mu_0 \frac{U e^{-\frac{t}{RC}}}{SR} \frac{r^2}{2} + K \text{ où } K \text{ est une constante (indépendante de } z).$$

Afin de déterminer la constante, on cherche une valeur particulière du champ magnétique. En tout point M de l'axe, tout plan contenant l'axe est plan de symétrie. Le champ magnétique est donc nul sur l'axe :  $\vec{B}(r=0, t) = \vec{0}$ . D'où  $K = 0$ .

$$\text{On a donc : } \vec{B}(r, t) = -\mu_0 \frac{Ur}{2SR} e^{-\frac{t}{RC}} \vec{u}_\theta.$$

6) On applique le théorème d'Ampère sur un contour  $\Gamma$  circulaire de rayon r et placé à la cote z.

On se trouve dans un milieu isolant donc :

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \epsilon_0 \iint_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{S},$$

où S est une surface qui prend appui sur le contour. On suppose que cette surface est celle du disque du rayon r.

Le contour est orienté dans le sens défini sur la figure donc  $d\vec{l} = r d\theta \vec{u}_\theta$ .

Le champ magnétique est constant sur le contour, voilà pourquoi on a :

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = B(r, t) \times 2\pi r.$$

La surface S est indiquée en vert clair sur la figure précédente. C'est une surface à z constant et  $\vec{E}$  reste alors constant aussi. D'après l'orientation du contour,  $d\vec{S} = dS \vec{u}_z$ .

$$\text{Donc } \mu_0 \epsilon_0 \iint_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \times \pi r^2.$$

$$\text{On en déduit } B(r, t) = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \times \frac{r}{2} = -\mu_0 \frac{Ur}{2SR} e^{-\frac{t}{RC}}.$$

$$\text{On trouve alors : } \vec{B}(r, t) = -\mu_0 \frac{Ur}{2SR} e^{-\frac{t}{RC}} \vec{u}_\theta.$$

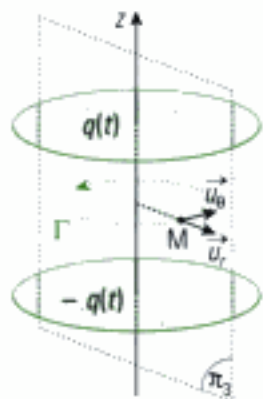
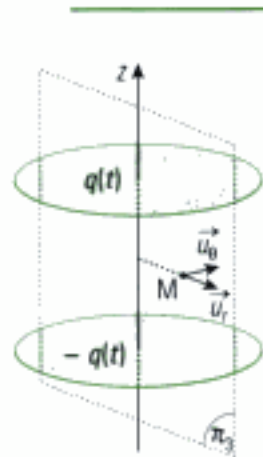
7) L'équation de Maxwell-Ampère est forcément vérifiée.

L'équation de Maxwell-Gauss  $\text{div} \vec{E} = 0$  est vérifiée car le champ électrique est dirigé suivant  $\vec{u}_z$  et indépendant de z.

L'équation de Maxwell-flux  $\text{div} \vec{B} = 0$  est vérifiée car le champ magnétique est dirigé suivant  $\vec{u}_\theta$  et indépendant de  $\theta$ .

En revanche,  $\text{rot} \vec{E} = \vec{0}$  car  $\vec{E}$  est indépendant des coordonnées spatiales

et  $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}(r, t) = \mu_0 \frac{Ur}{2SR^2 C} e^{-\frac{t}{RC}} \vec{u}_\theta \neq \vec{0}$ . **L'équation de Maxwell-Faraday n'est pas vérifiée.**



On en conclut que le modèle est insuffisant pour rendre compte des caractéristiques des champs électrique et magnétique.

8) a) L'étude électrique permet de déterminer la puissance reçue par le condensateur :  $P = u_C(t)i(t)$  où  $u_C(t) = \frac{q(t)}{C}$  représente la tension aux bornes du condensateur et  $i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$  est le courant traversant le condensateur compté positivement dans la convention récepteur.

On obtient  $P = u_C(t)i(t) = \frac{q(t)}{C} \frac{dq(t)}{dt}$  où  $q(t) = CU(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$ .

Donc  $P(t) = \frac{U^2}{R} e^{-\frac{t}{RC}} (1 - e^{-\frac{t}{RC}})$ .

b) L'énergie reçue par le condensateur est  $W = \int_0^t P(t') dt'$ .

On trouve :  $W(t) = \frac{CU^2}{2} (1 - 2e^{-\frac{t}{RC}} + e^{-2\frac{t}{RC}}) = \frac{CU^2}{2} (1 - e^{-\frac{t}{RC}})^2$ .

c) L'équation locale de Poynting est :

$$\text{div} \vec{R} + \vec{j} \cdot \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{dW}{dt} \right) = 0.$$

•  $\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{dW}{dt} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left( \epsilon_0 \frac{E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} \right)$  représente la puissance électromagnétique volumique cédée par le champ électromagnétique et reçue par le système.

•  $\vec{j} \cdot \vec{E}$  représente la puissance volumique cédée par le système aux porteurs de charges. Dans notre cas,  $\vec{j} \cdot \vec{E} = 0$ .

•  $-\text{div} \vec{R} = -\text{div} \left( \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \right)$  représente la puissance reçue par le système par le rayonnement électromagnétique.

d) Le vecteur de Poynting est  $\vec{R} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = -\frac{CU^2 r}{2\epsilon_0 S^2 R} e^{-\frac{t}{RC}} (1 - e^{-\frac{t}{RC}}) \vec{u}_r$ .

Or, on donne  $C = \frac{\epsilon_0 S}{d}$ .

Donc :  $\vec{R} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = -\frac{U^2 r}{2SRd} e^{-\frac{t}{RC}} (1 - e^{-\frac{t}{RC}}) \vec{u}_r$ .

e) La puissance cédée par le condensateur est égal au flux du vecteur de Poynting à travers la surface délimitant le condensateur.

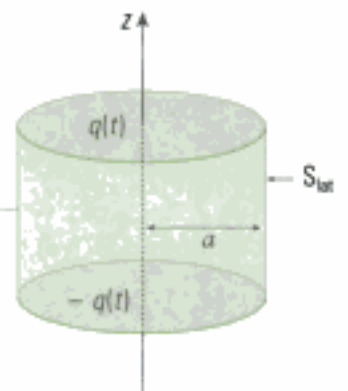
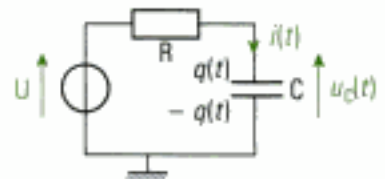
La puissance reçue correspond au flux de  $-\vec{R}$  à travers la surface latérale du condensateur puisque  $\vec{R}$  est dirigé selon  $\vec{u}_r$ . Cette surface latérale  $S_{\text{lat}}$  est la surface du cylindre de bases les deux armatures du condensateur. Tous les points de cette surface se trouvent à la distance  $a$  de l'axe et l'élément de surface est orienté suivant  $\vec{u}_r$ .

Donc  $P_{\text{reçue}} = - \iint_{S_{\text{lat}}} \vec{R} \cdot d\vec{S} = - \iint_{S_{\text{lat}}} -\frac{U^2 a}{2SRd} e^{-\frac{t}{RC}} (1 - e^{-\frac{t}{RC}}) a d\theta dz$ .

Avec  $S = \pi a^2$ , on retrouve :

$$P(t) = \frac{U^2}{R} e^{-\frac{t}{RC}} (1 - e^{-\frac{t}{RC}}).$$

On retrouve le même résultat qu'à la question 8) a). Le modèle que l'on utilise semble donc être cohérent pour l'étude énergétique du condensateur.



## Exercice 17

1) On doit comparer le courant de conduction et le courant de déplacement, c'est-à-dire pour un conducteur respectivement  $\gamma \vec{E}$  et  $\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ .

En régime sinusoïdal comme c'est le cas ici, on a  $\epsilon_0 \left\| \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right\| = \epsilon_0 \omega \|\vec{E}\|$ .

$\omega_0 = 2\pi f_0$  est déterminée par :  $\epsilon_0 \omega_0 \|\vec{E}\| = \frac{\gamma}{1000} \|\vec{E}\|$ .

On obtient alors  $f_0 = \frac{\gamma}{2000\pi\epsilon_0}$ , soit  $f_0 = 10^{15}$  Hz.

2) On met en œuvre la méthode n° 1.

On utilise les équations de Maxwell et on détermine  $\text{rot}(\text{rot} \vec{E}) = \text{grad}(\text{div} \vec{E}) - \Delta \vec{E}$ .

Dans l'ARQS (on travaille ici dans les basses fréquences), la densité volumique de charges  $\rho$  est nulle dans un conducteur (voir cours) donc  $\text{div} \vec{E} = 0$ .

D'après l'équation de Maxwell-Faraday,  $\text{rot}(\text{rot} \vec{E}) = \text{rot}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right)$ . On a vu en cours que l'on peut

intervertir les dérivées spatiales et temporelles donc :  $\text{rot}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial(\text{rot} \vec{B})}{\partial t}$ .

On en déduit  $\text{rot}(\text{rot} \vec{E}) = -\frac{\partial(\text{rot} \vec{B})}{\partial t} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t}$  par l'équation de Maxwell-Ampère.

De plus, d'après la loi d'Ohm, on a  $\vec{j} = \gamma \vec{E}$ .

Donc  $\text{rot}(\text{rot} \vec{E}) = -\mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ .

Ceci conduit à l'équation suivante :  $\Delta \vec{E} = \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ .

Ce champ électrique est produit par le champ extérieur qui est invariant par les translations selon les direction Oy et Oz. Il ne dépend donc que de la variable x.

On obtient alors :  $\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} = \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ .

3) a) D'après la loi d'Ohm ( $\vec{j} = \gamma \vec{E}$ ), la densité de courant est solution de l'équation différentielle

$$\frac{\partial^2 \vec{j}}{\partial x^2} = \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{j}}{\partial t}.$$

On se trouve en régime sinusoïdal forcé donc, en notation complexe,  $\frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = j\omega \vec{j}$  et le courant est dirigé selon  $\vec{u}_y$ .

On note alors la densité de courant volumique sous la forme  $\vec{j} = I(x)e^{j\omega t} \vec{u}_y$ .

On obtient l'équation différentielle suivante  $\frac{\partial^2 I(x)}{\partial x^2} = j\mu_0 \gamma \omega I(x)$ .

L'équation caractéristique associée à l'équation différentielle vérifiée par  $I(x)$  est :

$$r^2 = j\mu_0 \gamma \omega = \mu_0 \gamma \omega e^{j\frac{\pi}{2}}. \text{ Les solutions sont } r_1 = \sqrt{\gamma\mu_0\omega} e^{j\frac{\pi}{4}} \text{ et } r_2 = -\sqrt{\gamma\mu_0\omega} e^{j\frac{\pi}{4}}.$$

La solution pour l'équation différentielle  $I(x)$  est :

$$I(x) = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x} = Ae^{\sqrt{\frac{\gamma\mu_0\omega}{2}} x} e^{j\sqrt{\frac{\gamma\mu_0\omega}{2}} x} + Be^{-\sqrt{\frac{\gamma\mu_0\omega}{2}} x} e^{-j\sqrt{\frac{\gamma\mu_0\omega}{2}} x}.$$

On en conclut alors  $\vec{j} = I(x)e^{j\omega t} \vec{u}_y$  soit :

$$\vec{j} = \left( Ae^{\sqrt{\frac{\gamma\mu_0\omega}{2}} x} e^{j\left(\omega t + \sqrt{\frac{\gamma\mu_0\omega}{2}} x\right)} + Be^{-\sqrt{\frac{\gamma\mu_0\omega}{2}} x} e^{j\left(\omega t - \sqrt{\frac{\gamma\mu_0\omega}{2}} x\right)} \right) \vec{u}_y.$$

Or lorsque l'on pénètre dans le conducteur, le courant ne peut diverger. Donc si  $x \rightarrow +\infty$ ,  $\|\vec{j}\|$  ne doit pas diverger. On en conclut que A doit être nul sinon  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\sqrt{\frac{\gamma\mu_0\omega}{2}} x} = +\infty$ .

Il reste  $\vec{j} = Be^{-\sqrt{\frac{\gamma\mu_0\omega}{2}} x} e^{j\left(\omega t - \sqrt{\frac{\gamma\mu_0\omega}{2}} x\right)} \vec{u}_y$ .



On pose  $j_0$  le courant à l'interface du conducteur, on a alors :

$$\vec{j}(x, t) = j_0 e^{-\sqrt{\frac{\gamma \mu_0 \omega}{2}} x} \cos\left(\omega t - \sqrt{\frac{\gamma \mu_0 \omega}{2}} x\right) \vec{u}_y.$$

En posant :  $\delta = \sqrt{\frac{1}{\gamma \mu_0 \pi f}}$  et  $k = \sqrt{\gamma \mu_0 \pi f} = \frac{1}{\delta}$ , on obtient bien la forme de  $\vec{j}$  voulue.

b) La densité de courant à la distance  $3\delta$  de l'interface est égale à 5 % de la densité de courant sur l'interface. Pour une distance de  $5\delta$ , elle est inférieure à 1 % de  $j_0$ .

En fonction des approximations, au-delà de ces distances, on pourra négliger le courant : le courant dans le conducteur n'est présent que sur une épaisseur de l'ordre de grandeur de  $5\delta$ . C'est pourquoi on appelle  $\delta$  épaisseur de peau.

4) a) Pour obtenir le champ magnétique, on utilise l'équation de Maxwell-Faraday car on connaît le champ électrique  $\vec{E} = \frac{\vec{j}}{\gamma}$ .

L'étude en complexe est plus aisée.

$$\text{On a } \vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \vec{u}_z = -\sqrt{\frac{\gamma \mu_0 \omega}{2}} (1+j) \frac{j_0}{\gamma} e^{-\sqrt{\frac{\gamma \mu_0 \omega}{2}} x} e^{j(\omega t - \sqrt{\frac{\gamma \mu_0 \omega}{2}} x)} \vec{u}_z = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -j\omega \vec{B}.$$

$$\text{Soit : } \vec{B} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\gamma \omega}} e^{j\frac{\pi}{4}} \times e^{-j\frac{\pi}{2}} j_0 e^{-\frac{x}{\delta}} e^{j(\omega t - kx)} \vec{u}_z \text{ car } \sqrt{\frac{1}{2}} (1+j) = e^{j\frac{\pi}{4}} \text{ et } \frac{1}{j} = e^{-j\frac{\pi}{2}}.$$

$$\text{D'où } \vec{B} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\gamma \omega}} j_0 e^{-\sqrt{\frac{\gamma \mu_0 \omega}{2}} x} e^{j(\omega t - \sqrt{\frac{\gamma \mu_0 \omega}{2}} x - \frac{\pi}{4})} \vec{u}_z.$$

En notation réelle, on trouve :

$$\vec{B}(x, t) = \sqrt{\frac{\mu_0}{\gamma \omega}} j_0 e^{-\frac{x}{\delta}} \cos\left(\omega t - kx - \frac{\pi}{4}\right) \vec{u}_z.$$

b) La puissance moyenne rayonnée est  $P_R = \iint_S \langle \vec{R} \rangle \cdot d\vec{S}$  où  $\langle \vec{R} \rangle$  représente la valeur moyenne temporelle du vecteur de Poynting et  $d\vec{S} = dydz \vec{u}_x$ , puisque la surface est plane d'abscisse  $x$ .

Par définition,

$$\vec{R} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{\vec{j} \wedge \vec{B}}{\gamma \mu_0} = \frac{1}{\gamma} \sqrt{\frac{1}{\mu_0 \gamma \omega}} j_0^2 e^{-\frac{2x}{\delta}} \cos(\omega t - kx) \cos(\omega t - kx - \frac{\pi}{4}) \vec{u}_x.$$

⚠ Se rappeler de la formule de trigonométrie :  $\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)]$ .

$$\text{D'où } \vec{R} = \frac{\delta}{2\gamma\sqrt{2}} j_0^2 e^{-\frac{2x}{\delta}} \left( \cos(2\omega t - 2kx - \frac{\pi}{4}) + \cos(\frac{\pi}{4}) \right) \vec{u}_x.$$

$$\text{Donc } \langle \vec{R} \rangle = \frac{\delta}{2\gamma\sqrt{2}} j_0^2 e^{-\frac{2x}{\delta}} \cos(\frac{\pi}{4}) \vec{u}_x = \frac{\delta}{4\gamma} j_0^2 e^{-\frac{2x}{\delta}} \vec{u}_x.$$

$$\text{Ce vecteur ne dépend pas de } y \text{ et de } z \text{ donc } P_R = \iint_S \langle \vec{R} \rangle \cdot d\vec{S} = \iint_S \frac{\delta}{4\gamma} j_0^2 e^{-\frac{2x}{\delta}} dydz = \langle \vec{R} \rangle \cdot \vec{S}.$$

On trouve alors :

$$P_R = \frac{\delta S}{4\gamma} j_0^2 e^{-\frac{2x}{\delta}}.$$

⚠ Pour déterminer le vecteur de Poynting, on a utilisé la notation réelle des champs, car ce vecteur est un produit, donc une opération non linéaire. En notation complexe, le produit des parties réelles n'est pas égal à la partie réelle du produit. On ne peut donc utiliser les notations complexes que lorsque les opérations sur les champs sont linéaires (c'est le cas pour les équations de Maxwell), et pas lorsqu'elles sont non linéaires (c'est le cas des grandeurs énergétiques).

5) La puissance moyenne dissipée par effet Joule dans le volume  $V$  est  $P_J = \iiint_V \langle \vec{j} \cdot \vec{E} \rangle d\tau$ .

Or  $\vec{j} \cdot \vec{E} = \frac{j_0^2}{\gamma} e^{-\frac{2x}{\delta}} [\cos(\omega t - kx)]^2$  donc  $\langle \vec{j} \cdot \vec{E} \rangle = \frac{j_0^2}{2\gamma} e^{-\frac{2x}{\delta}}$ .

  $\langle \cos^2 \rangle = \frac{1}{2}$ .

On a alors  $P_J = \iiint_V \frac{j_0^2}{2\gamma} e^{-\frac{2x}{\delta}} dx dy dz = \frac{S}{2\gamma} j_0^2 \int_0^{5\delta} e^{-\frac{2x}{\delta}} dx$ .

D'où :  $P_J = -\frac{S\delta}{4\gamma} j_0^2 (e^{-10} - 1) \approx \frac{S\delta}{4\gamma} j_0^2$ .

6) On trouve  $P_J = P_R(x=0)$ .

La puissance dissipée par effet Joule est égale à la puissance reçue par le conducteur au niveau de l'interface avec l'extérieur ( $x=0$ ). Cela signifie que toute la puissance reçue par le conducteur est dissipée par effet Joule.

## Exercice 18

1) D'après l'équation de Maxwell-Ampère,  $\vec{\text{rot}} \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}_1}{\partial t}$ . Or les armatures sont séparées par du vide donc  $\vec{j} = \vec{0}$ . Cependant, le champ électrique dépend du temps donc  $\frac{\partial \vec{E}_1}{\partial t} \neq \vec{0}$ .

Il existe donc un champ magnétique  $\vec{B}_1$  tel que  $\vec{\text{rot}} \vec{B}_1 = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}_1}{\partial t}$ .

2) Les armatures sont circulaires. On utilise donc les coordonnées cylindriques.

Les armatures et le champ électrique sont invariant par rotation d'angle  $\theta$ . Le champ magnétique est donc indépendant de l'angle  $\theta$ . D'après l'énoncé, il est aussi indépendant de  $z$ .

Soit  $M$  un point de l'espace entre les armatures, le plan  $\pi_3 = (M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$  est un plan de symétrie de la distribution et du champ électrique donc le champ magnétique est normal à ce plan.

Il vient alors :  $\vec{B}_1 = B_1(r) \vec{u}_\theta$ .

3) L'écriture complexe donne  $\vec{E}_1 = E_0 e^{j\omega t} \vec{u}_z$  d'où l'équation de Maxwell-Ampère donne :

$$\vec{\text{rot}} \vec{B}_1 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r B_1(r)] \vec{u}_z = j\omega \mu_0 \epsilon_0 \vec{E}_1 = j \frac{\omega}{c^2} \vec{E}_1.$$

On en déduit :

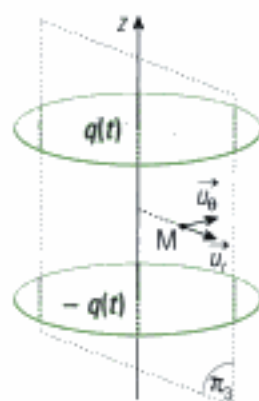
$$r B_1(r) = j \frac{\omega}{c^2} E_0 e^{j\omega t} \frac{r^2}{2} + K \text{ où } K \text{ est une constante.}$$

Afin de déterminer la constante, on cherche une valeur particulière du champ magnétique. En tout point  $M$  de l'axe, tout plan contenant l'axe est plan de symétrie. Le champ magnétique est donc nul sur l'axe  $\vec{B}_1(r=0) = \vec{0}$  et  $K = 0$ .

On a donc :  $\vec{B}_1(r) = j \frac{\omega}{c^2} E_0 \frac{r}{2} e^{j\omega t} \vec{u}_\theta$ .

4) Le champ réel est  $\vec{B}_1(r) = -\frac{\omega r}{2c^2} E_0 \sin \omega t \vec{u}_\theta$  car  $j e^{j\omega t} = j \cos \omega t - \sin \omega t$ .

5) Le champ électrique est relié au champ magnétique par l'équation de Maxwell-Faraday qui s'écrit  $\vec{\text{rot}} \vec{E}_2 = \frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t}$ . Or,  $\vec{B}_1(r) = j \frac{\omega}{c^2} \frac{r}{2} E_1 \vec{u}_\theta$ .



Le champ  $\vec{E}_2$  possède les mêmes invariances que le champ  $\vec{B}_1(r)$  dont il découle et ne dépend donc que de la variable  $r$ .

$$\text{On a donc : } \vec{\text{rot}} \vec{E}_2 = -\frac{\partial \vec{E}_2}{\partial r} \vec{u}_\theta = -\frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t} = \frac{\omega^2}{c^2} \frac{r}{2} \vec{E}_1 \vec{u}_\theta.$$

$$\text{D'où : } \frac{\partial \vec{E}_2}{\partial r} = -\frac{\omega^2}{c^2} \frac{r}{2} \vec{E}_1.$$

$$\text{On en déduit : } \vec{E}_2 = -\frac{\omega^2}{c^2} \frac{r^2}{4} \vec{E}_1.$$

 On a posé arbitrairement la constante d'intégration égale à 0.

6) Le champ électrique total est la somme des champs électriques  $\vec{E}_1$  et  $\vec{E}_2$ .

$$\text{Donc } \vec{E}_{T1} = \left(1 - \frac{\omega^2}{c^2} \frac{r^2}{4}\right) \vec{E}_1 \text{ et } \vec{E}_{T1} = \left(1 - \frac{\omega^2}{c^2} \frac{r^2}{4}\right) \vec{E}_1.$$

$$\text{On pose : } k(r) = \frac{\omega}{c} \frac{r}{2}.$$

7) On trouve  $k(R) = 0,01$ .

Cela signifie que le champ électrique au niveau des extrémités des armatures peut être assimilé à  $\vec{E}_1$  si on néglige les effets de bord. On en conclut également que le champ  $\vec{E}_2$  est négligeable partout devant  $\vec{E}_1$ .

8) On fait ici une étude rapide en tenant compte des différentes réponses apportées aux questions précédentes.

L'équation de Maxwell-Ampère donne :

$$\vec{\text{rot}} \vec{B}_2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r B_2(r)] \vec{u}_\theta = j \frac{\omega}{c^2} \vec{E}_2 = -j \frac{\omega^3}{c^4} \frac{r^2}{4} \vec{E}_1.$$

$$\text{On en déduit : } \vec{B}_2(r) = -j \frac{\omega^3}{c^4} \frac{r^3}{16} \vec{E}_1 \vec{u}_\theta.$$

Le champ électrique est relié au champ magnétique par l'équation de Maxwell-Faraday qui s'écrit

$$\vec{\text{rot}} \vec{E}_3 = -\frac{\partial \vec{B}_2}{\partial t}.$$

$$\text{On a donc : } \vec{\text{rot}} \vec{E}_3 = -\frac{\partial \vec{E}_3}{\partial r} \vec{u}_\theta = -\frac{\partial \vec{B}_2}{\partial t} = -\frac{\omega^4}{c^4} \frac{r^3}{16} \vec{E}_1 \vec{u}_\theta = \frac{\omega^2}{c^2} \frac{r}{4} \vec{E}_2 \vec{u}_\theta.$$

$$\text{Soit : } \frac{\partial \vec{E}_3}{\partial r} = -\frac{\omega^4}{c^4} \frac{r^3}{16} \vec{E}_1.$$

$$\text{On en déduit : } \vec{E}_3 = \frac{\omega^4}{c^4} \frac{r^4}{64} \vec{E}_1 = \frac{[k(r)]^4}{4} \vec{E}_1.$$

9) Pour  $R = 10 \text{ cm}$ ,  $k(R) = 0,01$ , ce qui permet de négliger l'amplitude du champ  $\vec{E}_2$  devant celle de  $\vec{E}_1$ . Les autres champs sont donc aussi négligeables devant  $\vec{E}_1$ . D'où :  $\vec{E} = \vec{E}_1$ .

On peut conclure de ce résultat que sur la totalité de l'espace entre les armatures du condensateur, le champ électrique global est assimilable au champ  $\vec{E}_1$  de départ.

## Exercice 19

1) On applique la méthode n° 4.

> Il s'agit d'une distribution de charges. On étudie alors en premier le champ électrique.

• Les charges sont réparties en volume donc le champ électrique  $\vec{E}$  est défini et continu en tout point.

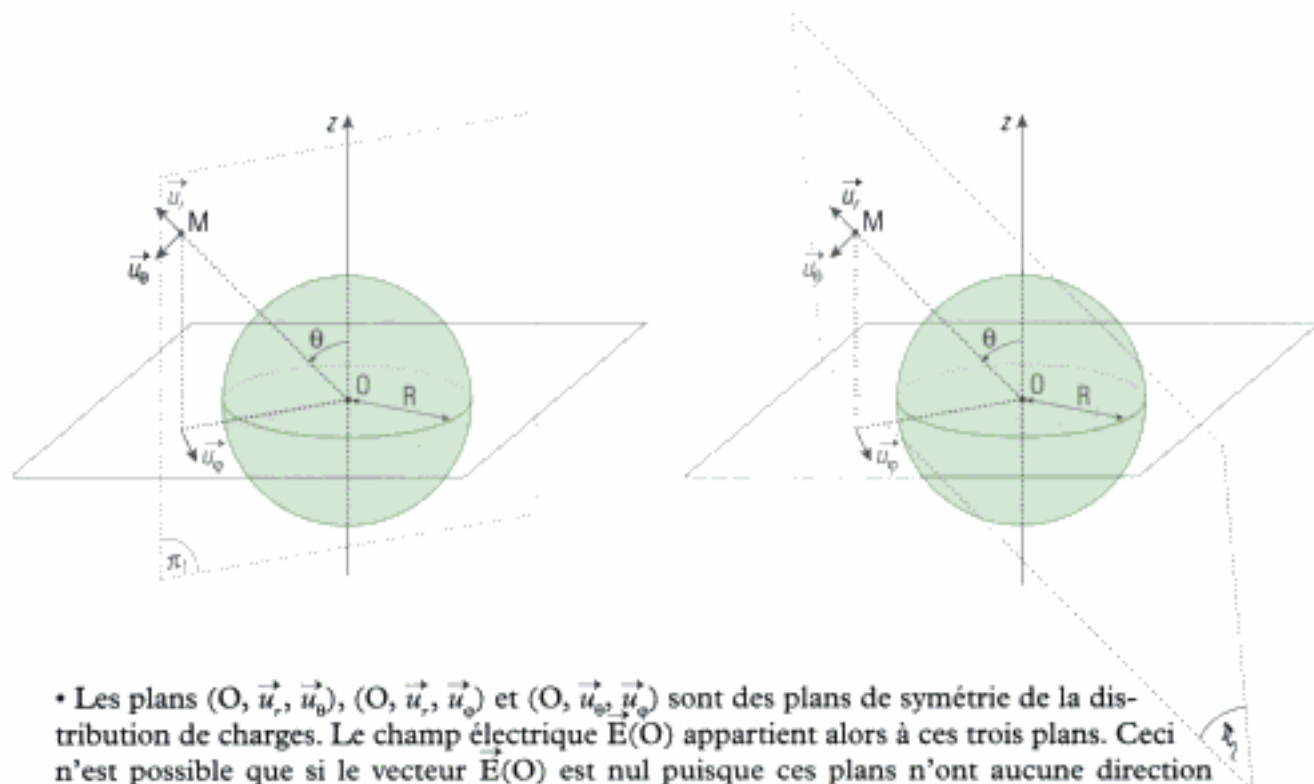


- La distribution de charges est à symétrie sphérique, on utilisera donc les coordonnées sphériques et les vecteurs de base associés  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$ .

On étudie les symétries et invariances du champ électrique en un point M de l'espace. Les plans  $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ , noté  $\pi_1$  sur la figure, et  $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\varphi)$ , noté  $\pi_2$  sur la figure, sont des plans de symétrie pour la distribution de charge. Donc le champ électrique est porté par la direction de la droite intersection des deux plans.  $\vec{E}$  est dirigé selon  $\vec{u}_r$ .

La distribution de charge est invariante par les rotations d'angle  $\theta$  et  $\varphi$ . Le champ électrique n'est alors fonction que de la variable  $r$ .

On obtient : 
$$\vec{E}(M) = E(r)\vec{u}_r.$$



- Les plans  $(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ ,  $(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\varphi)$  et  $(O, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$  sont des plans de symétrie de la distribution de charges. Le champ électrique  $\vec{E}(O)$  appartient alors à ces trois plans. Ceci n'est possible que si le vecteur  $\vec{E}(O)$  est nul puisque ces plans n'ont aucune direction commune :

$$\vec{E}(O) = \vec{0}.$$

- L'équation de Maxwell-Gauss permet de déterminer le champ électrique à partir de la densité volumique de charges :  $\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ .

On connaît la valeur du champ électrique au point O intérieur à la distribution de charge. On commence donc l'étude pour  $r \leq R$ .

En un point M tel que  $r \leq R$ , la densité volumique de charge est  $\rho$ . Alors :

$$\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Leftrightarrow \text{div} \vec{E} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 E)}{\partial r} = \frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

On en déduit :

$$r^2 E(r) = \frac{\rho}{\epsilon_0} \frac{r^3}{3} + K \text{ où } K \text{ est une constante d'intégration.}$$

$E(r=0) = 0$  donne  $K = 0$ .

On en conclut : 
$$\vec{E}(r \leq R) = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \vec{u}_r.$$

En un point M tel que  $r \geq R$ , la densité volumique de charge est nulle. Alors :

$$\text{div} \vec{E} = 0 \Leftrightarrow \text{div} \vec{E} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 E)}{\partial r} = 0.$$

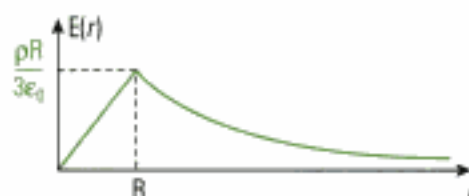
On en déduit :

$$r^2 E(r) = K' \text{ où } K' \text{ est une constante d'intégration.}$$

Le champ électrique est continu à l'interface car il n'y a pas de charge surfacique, donc :

$$R^2 E(r = R) = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0} = K'.$$

On en conclut :  $\vec{E}(r \geq R) = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$ .



Pour trouver l'expression de  $\vec{E}$ , on aurait pu utiliser le théorème de Gauss appliqué à des sphères de centre O et de rayon  $r$ . Le théorème de Gauss correspondant à la forme intégrale de l'équation de Maxwell-Gauss, il est équivalent ici de raisonner d'après l'équation locale ou d'après le théorème de Gauss.

### > On étudie ensuite le champ magnétique.

On étudie d'abord les symétries et invariances du champ électrique qui est source du champ magnétique. On travaille toujours en coordonnées sphériques avec les vecteurs de base  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\phi)$ . Soit M un point quelconque de l'espace, les plans  $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$  et  $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\phi)$  sont des plans de symétrie de la distribution de courant « de déplacement ». Le champ magnétique  $\vec{B}(M)$  est alors normal à ces deux plans. Or, ces deux plans sont perpendiculaires. Donc, l'unique solution est :

$$\vec{B}(M) = \vec{0}.$$

2) On calcule la somme de l'énergie électromagnétique  $W_1$  dans la sphère et l'énergie électromagnétique  $W_2$  à l'extérieur de la sphère.

Par définition,  $\frac{dW}{d\tau} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{2\mu_0}$  est l'énergie volumique électromagnétique en un point.

• Pour  $r \leq R$ ,  $\frac{dW}{d\tau} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 = \frac{1}{2\epsilon_0} \left( \frac{\rho r}{3} \right)^2$ .

Donc  $W_1 = \iiint_{V_S} \frac{dW}{d\tau} d\tau$  où  $V_S$  représente le volume de la sphère et  $d\tau = r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi$  est un volume élémentaire en coordonnées sphériques.

$$\text{D'où } W_1 = \iiint_{V_S} \frac{1}{2\epsilon_0} \left( \frac{\rho r}{3} \right)^2 r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi = \frac{\rho^2}{18\epsilon_0} \int_0^R r^4 dr \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi.$$

$$\text{On obtient : } W_1 = \frac{2\pi\rho^2 R^5}{45\epsilon_0}.$$

• Pour  $r \geq R$ ,  $\frac{dW}{d\tau} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 = \frac{1}{2\epsilon_0} \left( \frac{\rho R^3}{3r^2} \right)^2$ .

$$\text{Donc : } W_2 = \iiint_{R^+ \setminus V_S} \frac{dW}{d\tau} d\tau.$$

D'où :

$$W_2 = \iiint_{R^+ \setminus V_S} \frac{1}{2\epsilon_0} \left( \frac{\rho R^3}{3r^2} \right)^2 r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi = \frac{\rho^2 R^6}{18\epsilon_0} \int_R^{+\infty} \frac{1}{r^2} dr \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi.$$

$$\text{On obtient : } W_2 = \frac{2\pi\rho^2 R^5}{9\epsilon_0}.$$

$$\text{On en conclut que } W = W_1 + W_2 = \frac{2\pi\rho^2 R^5}{45\epsilon_0} + \frac{2\pi\rho^2 R^5}{9\epsilon_0}.$$

$$\text{D'où : } W = \frac{4\pi\rho^2 R^5}{15\epsilon_0}.$$

3) a)  $dq$  représente la charge comprise dans la sphère creuse de rayon intérieur  $r$  et de rayon extérieur  $r + dr$ . Le volume de cette sphère creuse est  $dV = r^2 dr \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = 4\pi r^2 dr$ .

Donc :

$$dq = \rho 4\pi r^2 dr.$$

b) D'après le calcul de la question 1),  $\vec{E}(r') = \frac{\rho r^3}{3\epsilon_0 r'^2} \vec{u}_r$ .

La charge  $dq$  qui se trouve à la distance  $r'$  subit une force électrostatique :

$$\vec{F}(r') = dq \vec{E}(r') = dq \frac{\rho r^3}{3\epsilon_0 r'^2}.$$

c) Lorsque l'opérateur apporte la charge  $dq$  sur la sphère, le travail de cette force électrostatique est  $dW_{es} = \int_{r'=+\infty}^{r'=r} \vec{F}(r') \cdot d\vec{l}$  où  $d\vec{l} = dr' \vec{u}_r$  représente le déplacement élémentaire pour se rapprocher de la sphère.

Donc :

$$dW_{es} = \int_{+\infty}^r dq \frac{\rho r^3}{3\epsilon_0 r'^2} dr' = -dq \frac{\rho r^2}{3\epsilon_0}.$$



Ce travail est bien entendu négatif puisque la force électrostatique est résistante (la sphère repousse la charge  $dq$  de même signe).

d) L'opérateur doit compenser les forces électrostatique et donc fournir le travail opposé.

D'où :

$$dW_{op} = -dW_{es} = dq \frac{\rho r^2}{3\epsilon_0} = \frac{4\pi\rho^2 r^4}{3\epsilon_0} dr.$$

e) Pour construire entièrement cette sphère, l'opérateur doit fournir le travail nécessaire pour agréger toutes les calottes sphériques de rayon intérieur  $r$  et de rayon extérieur  $r + dr$  en partant de  $r = 0$  jusqu'à  $r = R$ .

Donc  $W_{op} = \int dW_{op} = \int_0^R \frac{4\pi\rho^2 r^4}{3\epsilon_0} dr$ , et on obtient :

$$W = \frac{4\pi\rho^2 R^5}{15\epsilon_0}.$$

On retrouve l'énergie du champ électromagnétique de la distribution. Cette énergie provient donc de l'énergie fournie pour construire la distribution de charge.

**L'énergie fournie pour construire la distribution se retrouve sous forme d'énergie électromagnétique.**





# Induction électromagnétique dans un circuit fixe

## Introduction

La physique de l'induction électromagnétique est basée sur l'équation de Maxwell-Faraday, dans laquelle on voit apparaître que les variations temporelles du champ magnétique sont à l'origine d'une source de champ électrique. Ce champ électrique possède une circulation non conservative.

Les régimes varient en général suffisamment lentement pour que l'on puisse se placer dans le cadre de l'Approximation des Régimes Quasi-Stationnaires, ce qui signifie que les phénomènes d'induction ne sont que « faiblement » variables.

On donnera tout d'abord les lois générales de l'induction, puis on étudiera le cas de l'auto-induction et de l'induction mutuelle dans les circuits, pour conclure par une application utilisée quotidiennement : le transformateur.

### Plan du chapitre 3

A. Champ électromoteur .....	124
B. Force électromotrice induite .....	125
C. Auto-induction .....	128
D. Inductance mutuelle .....	130
E. Application : le transformateur .....	133
<b>Méthodes</b>	
L'essentiel ; mise en œuvre .....	136
Énoncés des exercices .....	141
Indications .....	144
Solutions des exercices .....	145

## A. Champ électromoteur

On propose une démonstration des lois de l'induction électromagnétique à partir des équations de Maxwell. On rappelle celles qui seront utiles pour le raisonnement.

### A.1. Les équations de Maxwell constitutives

L'équation de Maxwell-flux s'écrit  $\text{div} \vec{B} = 0$ , soit  $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ .

1. Voir chapitre 1 §G.2 Propriété 8.

On en a déduit<sup>1</sup> que le champ magnétique  $\vec{B}$  dérive d'un champ de vecteurs  $\vec{A}$  tel que  $\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$  en tout point, soit :

$$\vec{B} = \text{rot} \vec{A}.$$

$\vec{A}$  est le potentiel vecteur de  $\vec{B}$ .

L'équation de Maxwell-Faraday a ensuite été réécrite en tenant compte du potentiel vecteur  $\vec{A}$  du champ magnétique  $\vec{B}$  :

$$\text{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial t} (\text{rot} \vec{A}), \text{ soit } \text{rot} \left( \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = \vec{0}.$$

2. Voir chapitre 1 §G.2 Propriété 7.

On en a déduit<sup>2</sup> qu'il existe un champ de scalaires  $V$  tel que

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = - \vec{\text{grad}} V, \text{ en tout point, soit :}$$

$$\vec{E} = - \vec{\text{grad}} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}.$$

$V$  est le potentiel scalaire du champ électrique  $\vec{E}$ .

### A.2. Circulation du champ électrique et définition

On considère un contour (ligne fermée)  $\Gamma$ , le long de laquelle on calcule la circulation du champ électrique  $\vec{E} = - \vec{\text{grad}} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$  en régime variable.

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \oint_{\Gamma} - \vec{\text{grad}} V \cdot d\vec{l} + \oint_{\Gamma} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot d\vec{l} = \oint_{\Gamma} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot d\vec{l},$$

3. Voir chapitre 1 §C.3. Propriété 1.

un gradient étant à circulation conservative<sup>3</sup> :

$$\oint_{\Gamma} - \vec{\text{grad}} V \cdot d\vec{l} = \oint_{\Gamma} - dV = 0.$$

On définit le champ électromoteur d'induction de la manière suivante :

#### Définition 1

Le **champ électromoteur d'induction**  $\vec{E}_m$  est défini par la partie du champ électrique  $\vec{E}$  qui n'est pas *a priori* à circulation conservative :

$$\vec{E}_m = - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}.$$

On parle du champ électromoteur « de Neumann »<sup>4</sup> pour spécifier que son existence est liée aux variations temporelles du champ magnétique<sup>5</sup>.

4. John Von Neumann (1903-1957) était un physicien hongrois dont les principaux travaux ont porté sur l'intelligence artificielle. Il a construit à Princeton vers 1950 le premier ordinateur flexible.

5. On verra dans le prochain chapitre le champ électromoteur « de Lorentz » lié au mouvement d'un conducteur dans un champ magnétique.



## B. Force électromotrice induite

### B.1. Résistance électrique

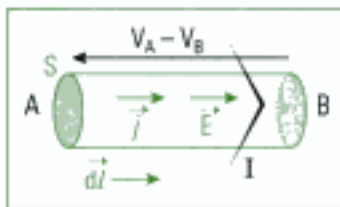


Fig. 1 - Conducteur de section S.

On considère une portion de circuit se trouvant entre les points A et B (fig. 1). Elle est constituée de conducteur pour lequel on peut écrire la loi d'Ohm locale :

$$\vec{j} = \gamma \vec{E}.$$

Cette loi d'Ohm locale permet de définir le concept de résistance et d'écrire la loi d'Ohm macroscopique.

En effet, l'intensité I du courant qui traverse le conducteur s'écrit :

$$I = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S},$$

où S est une section du conducteur.

En régime continu, la différence de potentiel entre A et B vaut :

$$\begin{aligned} V_A - V_B &= \int_A^B -\vec{\text{grad}}V \cdot d\vec{l} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} \text{ car } \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{0}. \\ &= \int_A^B \frac{\vec{j} \cdot d\vec{l}}{\gamma} \quad (\text{loi d'Ohm locale}) \\ &= \int_A^B \frac{j dl}{\gamma} = \int_A^B \frac{Idl}{S\gamma} \quad (\vec{j} \text{ et } d\vec{l} \text{ sont supposés colinéaires et } I = j \cdot S) \\ &= R_{AB} I, \text{ avec } R_{AB} = \int_A^B \frac{dl}{S\gamma} \text{ résistance électrique du circuit } \widehat{AB}. \end{aligned}$$

1. On peut appeler  $dR = \frac{dl}{\gamma S}$  la résistance de la longueur élémentaire  $dl$ .

En régime continu, la résistance électrique  $R_{AB}$  du circuit  $\widehat{AB}$  est définie comme le rapport de la différence de potentiel entre les points A et B et l'intensité I qui traverse le conducteur :

$$R_{AB} = \frac{V_A - V_B}{I} = \frac{\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}}{\iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}} = \int_A^B \frac{dl}{S\gamma},$$

où  $\gamma$  est la conductivité et S la section du conducteur.

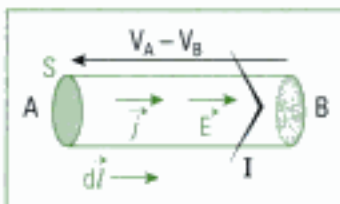


Fig. 2 - Conducteur de section S.

2. Le sens de calcul de la circulation détermine le sens conventionnel du courant, ici de A vers B.

### B.2. Définition

De manière générale, l'intensité I entre les deux points A et B est donnée par la relation (fig. 2) :

$$R_{AB} I = R_{AB} \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}.$$

C'est cette expression qui définit l'intensité, même en régime variable, car c'est le champ électrique  $\vec{E}$  qui met les charges électriques en mouvement et qui crée donc l'intensité I.

En régime variable, on a :

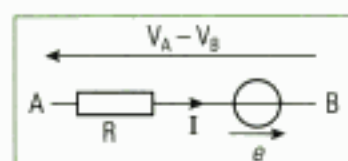
$$\vec{E} = -\vec{\text{grad}}V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\vec{\text{grad}}V + \vec{E}_m, \text{ donc :}$$

$$R_{AB} I = \int_A^B -\vec{\text{grad}}V \cdot d\vec{l} + \int_A^B \vec{E}_m \cdot d\vec{l} = V_A - V_B + e,$$

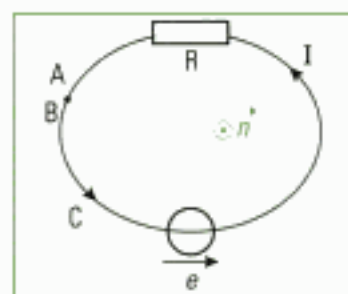
avec  $e$  défini comme suit :

1. On trouve souvent l'abréviation *fem* ou *fém* pour force électromotrice.

2.  $\mathcal{e}$  est une force électromotrice induite comptée positivement si  $\vec{E}_m$  tend à faire circuler un courant positif.



**Fig. 3** - Schéma équivalent du circuit AB. La flèche de la tension  $V_A - V_B$  va de B vers A.



**Fig. 4** - Schéma équivalent du contour C.

3. Michael Faraday (1791-1867) était un physicien anglais dont les principaux travaux concernèrent l'électromagnétisme. Il montra le fonctionnement de l'électrisation des conducteurs (cage de Faraday), mit en évidence l'induction électromagnétique dès 1831 (loi de Faraday) et découvrit l'effet de champs magnétiques forts sur la rotation de la polarisation d'une onde lumineuse (effet Faraday).

4. Le champ magnétique  $\vec{B}(\vec{M}, t)$  est à flux conservatif, son flux  $\phi(t)$  dépend alors uniquement du temps et pas de la surface  $S$ , c'est pourquoi la dérivée devient droite.

5. L'unité du flux magnétique est le Weber de symbole Wb.

6. Le circuit n'est alors pas nécessairement fixe dans un champ magnétique variable, mais peut aussi être mobile dans un champ magnétique uniforme.

7. Cette propriété sera démontrée dans le prochain chapitre.

8. La loi de Lenz traduit une modération et est exprimée par le signe négatif de la loi de Faraday  $\mathcal{e} = -\frac{d\phi}{dt}$  : la force électromotrice d'induction  $\mathcal{e}$  s'oppose aux variations du flux appliqué.

### Définition 3

La force électromotrice d'induction  $\mathcal{e}$  qui apparaît entre les points A et B est donnée par l'expression :

$$\mathcal{e} = \int_A^B \vec{E}_m \cdot d\vec{l}.$$

On a alors :

$$V_A - V_B = R_{AB} I - \mathcal{e}.$$

Le générateur de force électromotrice  $\mathcal{e}$  est fléché dans le sens du courant car la partie du circuit AB a été notée en convention récepteur (fig. 3).

## B.3. Cas d'un circuit fermé : loi de Faraday<sup>3</sup>

Le circuit reste indéformable, fixe et est constitué par un contour C (ligne fermée), sur lequel s'appuie une surface S (fig. 4). L'expression de la force électromotrice induite  $\mathcal{e}$  devient :

$$\mathcal{e} = \oint_C \vec{E}_m \cdot d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_S \text{rot } \vec{A} \cdot d\vec{S} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = -\frac{d\phi}{dt},$$

où  $\phi$  désigne le flux du champ magnétique  $\vec{B}$  à travers  $S$ .

### Loi 1

#### Loi de Faraday

La force électromotrice d'induction  $\mathcal{e}$  qui apparaît dans un circuit fermé C est donnée par la relation :

$$\mathcal{e} = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS,$$

où  $\phi$  désigne le flux du champ magnétique à travers C.

Le sens de la force électromotrice (sens de la flèche du générateur) est le même que celui du contour C (fig. 5).



**Fig. 5** - Flux magnétique  $\phi$  à travers le circuit C.

La loi de Faraday peut être appliquée dès qu'un circuit est traversé par un flux magnétique variable.

## B.4. Lois qualitatives

Ce sont des lois qualitatives qui permettent d'évaluer les conditions de l'induction électromagnétique :

### Loi 2

i) Tout conducteur mobile dans un champ magnétique  $\vec{B}$  est le siège d'une force électromotrice d'induction  $\mathcal{e}$ .

ii) Tout circuit fermé plongé dans un flux magnétique variable est le siège d'une force électromotrice d'induction  $\mathcal{e}$ .

iii) La force électromotrice induite  $\mathcal{e}$  a un signe tel que ses effets tendent à s'opposer aux causes qui lui ont donné naissance : c'est la loi de Lenz<sup>5</sup>.

### Application 1 Loi de Lenz dans un circuit

Trouver le sens de l'intensité du courant induit dans le circuit C fixe de résistance R schématisé ci-contre, sachant que la norme  $B(t)$  du champ magnétique inducteur  $\vec{B}$  uniforme et orthogonal à la surface du circuit est une fonction croissante du temps. Vérifier ce résultat grâce à la loi de Lenz.

#### Solution

On oriente le circuit de façon à ce que la normale  $\vec{n}$  au circuit C soit colinéaire et de même sens que  $\vec{B}$ . On donne ainsi l'orientation du courant induit I susceptible de traverser le circuit et de la flèche du générateur de tension représentant la force électromotrice d'induction  $\epsilon$  (la même que le circuit C).

On applique la loi de Faraday, en accordant une attention particulière aux signes des grandeurs trouvées.

Le flux magnétique s'écrit :  $\phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iint_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS = BS > 0$ ,

où S est une surface s'appuyant sur le contour C.

La force électromotrice d'induction  $\epsilon$  peut alors être calculée :

$$\epsilon = - \frac{d\phi}{dt} = -S \frac{dB}{dt} < 0, \text{ car } B \text{ est une fonction croissante du temps.}$$

D'après la définition 1 du § B.2., on a :

$$V_A - V_B = RI - \epsilon, \text{ avec les points A et B confondus.}$$

Il vient donc  $I = \frac{\epsilon}{R} < 0$ .

En conséquence, le sens du courant induit est contraire au sens conventionnel (positif) choisi.

Vérifions ce résultat en utilisant la loi de Lenz. La force électromotrice  $\epsilon$  induite admet un signe négatif et engendre ainsi une intensité I induite négative. Ce courant induit d'intensité I négative crée alors un flux propre  $\phi_p < 0$  qui s'oppose bien à la variation positive du flux appliqué  $\frac{d\phi}{dt} > 0$ . La loi de Lenz est donc bien vérifiée.

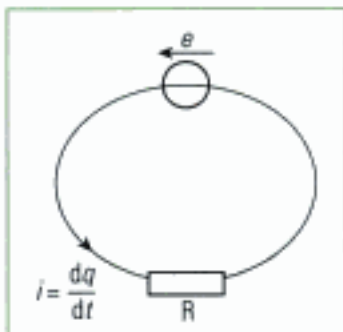
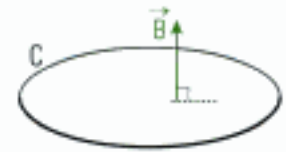


Fig. 6 - Schéma électrique équivalent.

1. On suppose qu'il n'y a qu'une résistance.

2. Il ne s'agit pas nécessairement de l'intensité totale, un générateur pouvant être présent. On ne s'intéresse qu'à la partie du courant qui existe du fait de l'induction. C'est une application du théorème de superposition.

## B.5. Quantité d'électricité induite

On calcule la quantité d'électricité, c'est-à-dire la charge Q, qui a circulé dans un circuit fermé (fig. 6) suite aux phénomènes d'induction électromagnétique dont il a été le siège. Soit R la résistance<sup>1</sup> totale du circuit, i l'intensité du courant induit qui le traverse, et q la charge électrique liée à i : on pose donc  $i = \frac{dq}{dt}$ .

Le circuit est fermé, donc la loi des mailles donne :

$$Ri - \epsilon = 0.$$

Or on sait que  $\epsilon = - \frac{d\phi}{dt}$ , que l'on injecte dans l'équation précédente :

$$R \frac{dq}{dt} = - \frac{d\phi}{dt}, \text{ soit } dq = - \frac{1}{R} d\phi,$$

et enfin, en intégrant entre l'état initial « i » et l'état final « f » :

#### Propriété 1

La charge électrique Q qui a circulé dans le circuit du fait des phénomènes d'induction s'écrit :

$$Q = \int_i^f dq = - \frac{1}{R} (\phi_f - \phi_i) = - \frac{1}{R} \Delta\phi.$$



## C. Auto-induction

Un circuit fermé  $\Gamma$  parcouru par un courant d'intensité  $i$  crée un champ magnétique  $\vec{B}$  dans l'espace. Si l'intensité  $i$  dépend du temps, alors  $\vec{B}$  aussi et un phénomène d'induction prend naissance dans le circuit.

### C.1. Coefficient d'inductance propre

Le circuit  $\Gamma$  crée un champ magnétique  $\vec{B}$  dont la norme  $B$  est proportionnelle à  $i$ .

En effet, la loi de Biot et Savart donne l'expression du champ magnétique  $\vec{B}$  créé par un circuit  $\Gamma$  parcouru par une intensité  $i$  :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \oint_{\Gamma} \frac{d\vec{l} \wedge \vec{PM}}{PM^3}.$$

Ce champ  $\vec{B}$  crée un flux magnétique  $\phi_p$  à travers le circuit<sup>1</sup>  $\Gamma$ , appelé flux propre, qui reste donc proportionnel à  $i$  :

$$\phi_p = \iint_{M \in S} \vec{B}(M) \cdot \vec{n} dS = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \iint_{M \in S} \left( \oint_{\Gamma} \frac{d\vec{l} \wedge \vec{PM}}{PM^3} \right) \cdot \vec{n} dS.$$

#### Définition 4

On appelle **inductance propre**  $L$  d'un circuit le coefficient de proportionnalité qui existe entre le flux propre  $\phi_p$  et l'intensité  $i$  du courant qui traverse le circuit :

$$\phi_p = Li.$$

La valeur de  $L$  ne dépend que du circuit (forme, nombre de spires, etc.) et de la perméabilité absolue  $\mu_0$  du vide.

L'inductance propre  $L$  est aussi appelé coefficient d'auto-inductance ou coefficient de self, et parfois simplement « self ».

L'unité SI de l'inductance propre  $L$  est le henry<sup>2</sup>, de symbole H.

### C.2. Force électromotrice d'auto-induction

Le circuit  $\Gamma$  étant fermé<sup>3</sup>, l'expression de la force électromotrice d'induction est donnée par la loi de Faraday :

#### Définition 5

La **force électromotrice d'auto-induction**  $e$  dans un circuit d'intensité  $i$  et d'inductance propre  $L$  s'écrit :

$$e = - \frac{d\phi_p}{dt} = - L \frac{di}{dt}.$$

### C.3. Schéma électrique équivalent

On note  $R$  la résistance électrique du circuit,  $E$  la force électromotrice qui impose le courant dont la valeur est finalement  $i$ . On écrit la différence de potentiel  $u$  qui existe aux bornes du générateur, écrite pour lui en convention générateur (fig. 7). Cette différence de potentiel s'écrit donc en convention récepteur pour ce qui est du reste du circuit<sup>5</sup> :

$$u = E = Ri - e = Ri + L \frac{di}{dt}.$$

1. On peut trouver une surface  $S$  ouverte qui s'appuie sur le circuit  $\Gamma$ .

2. Il n'est pas question de se lancer dans le calcul de telles intégrales. On veut seulement montrer la proportionnalité avec l'intensité  $i$ .

3. Joseph Henry (1797-1878) était un physicien américain. En 1832, il découvrit l'induction, simultanément avec Michael Faraday et introduisit en 1840 la notion d'auto-induction.

4. Il l'est nécessairement, puisqu'il est parcouru par un courant d'intensité  $i$ .

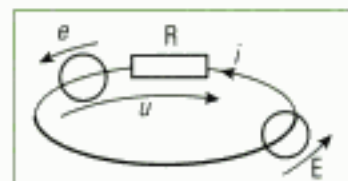


Fig. 7 - Schéma électrique équivalent.

5. Le reste du circuit contient ici une résistance et la force électromotrice d'induction. Voir § B.2. pour la schématisation de cette force électromotrice.

### Propriété 2

La différence de potentiel aux bornes d'un bobinage de résistance  $R$  et de coefficient d'auto-inductance  $L$  parcouru par un courant d'intensité  $i$  s'écrit, en convention récepteur :

$$u = E = Ri - e = Ri + L \frac{di}{dt}$$

1. On a ainsi démontré la relation admise en électricité dans le cours de première année.

## C.4. Bilan énergétique

Pour effectuer un bilan de puissances, multiplions par  $i$  l'équation précédente :

$$ui = Ri^2 - ei = Ri^2 + Li \frac{di}{dt} = Ri^2 + \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} Li^2 \right)$$

Comme la tension  $u$  aux bornes du dipôle passif a été prise en convention récepteur, on a obtenu la puissance reçue par le dipôle.

Afin d'avoir un bilan énergétique entre deux instants consécutifs  $t$  et  $t + dt$ , multiplions la puissance par  $dt$ . Il vient :

$$Uiddt = Ri^2 dt + d \left( \frac{1}{2} Li^2 \right)$$

L'interprétation est la suivante :

### Propriété 3

L'énergie  $Uiddt$  reçue par le dipôle entre les instants  $t$  et  $t + dt$  est égale à la somme de l'énergie dissipée par effet Joule  $Ri^2 dt$  et de celle  $d \left( \frac{1}{2} Li^2 \right)$  emmagasinée par le circuit (ici le bobinage de résistance  $R$ ).  $\frac{1}{2} Li^2$  est l'énergie totale emmagasinée dans le circuit constitué par le bobinage.

## C.5. Localisation de l'énergie électromagnétique

Nous allons traiter ce sujet sur l'exemple simple du solénoïde de longueur  $d$  comportant  $N$  spires et pouvant être considéré comme infiniment long<sup>2</sup> (fig. 8).

Le champ magnétique  $\vec{B}$  créé vaut alors<sup>3</sup> :

$$\vec{B} = \begin{cases} \mu_0 \frac{N}{d} i \vec{u}_z = B_{int} \vec{u}_z & \text{à l'intérieur du solénoïde} \\ \vec{0} & \text{à l'extérieur du solénoïde} \end{cases}$$

Le flux propre de ce champ  $\vec{B}$  a pour expression :

$$\phi_p = NB_{int} S = \mu_0 \frac{N^2}{d} Si,$$

car le champ magnétique est normal à la surface des  $N$  spires.

On peut donc définir l'inductance du solénoïde :

$$L = \frac{\phi_p}{i} = \mu_0 \frac{N^2}{d} S.$$

L'énergie emmagasinée dans la bobine, c'est-à-dire par le solénoïde, vaut donc :

$$W = \frac{1}{2} Li^2 = \frac{1}{2} \mu_0 \frac{N^2}{d} Si^2.$$

2. Cela revient à négliger les effets de bord.

3. Voir cours de magnétostatique de première année.

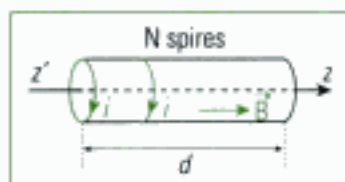


Fig. 8 - Solénoïde d'axe  $(z'z)$

Le champ magnétique n'est non nul qu'à l'intérieur du solénoïde et la densité volumique d'énergie du champ est :

$$\frac{dW'}{d\tau} = \frac{B^2}{2\mu_0}.$$

Comme le champ électrique est nul et que la densité volumique d'énergie magnétique est uniforme dans le solénoïde, l'énergie  $W'$  du champ électromagnétique vaut :

$$W' = \frac{dW'}{d\tau} \tau = \frac{\left(\mu_0 \frac{N^2}{d} i\right)^2}{2\mu_0} Sd = \frac{1}{2} \mu_0 \frac{N^2}{d} Si^2 = \frac{1}{2} Li^2 = W.$$

On a retrouvé l'expression de l'énergie emmagasinée dans le bobinage.

**L'énergie électromagnétique emmagasinée par le circuit est donc localisée dans l'espace du bobinage qui constitue ce circuit.**

## C.6. Continuité du courant

L'existence de cette énergie emmagasinée interdit les discontinuités de courant. En effet, l'énergie emmagasinée est proportionnelle à  $i^2$ . Si une discontinuité de courant avait lieu, l'intensité passant de la valeur  $i_1$  à la valeur  $i_2$  pendant une durée nulle, alors cette discontinuité de courant s'accompagnerait d'une dissipation instantanée d'énergie :

$$\Delta W = \frac{1}{2} Li_2^2 - \frac{1}{2} Li_1^2,$$

qui supposerait une puissance  $P = \frac{\Delta W}{\partial t}$ , avec  $\Delta W \neq 0$  et  $\partial t = 0$ . Cette puissance serait infinie, et on met ainsi en évidence la continuité du courant.

### Propriété 4

Dans un circuit où se trouve une inductance  $L$ , l'intensité ne peut subir de discontinuité. On dit que l'auto-induction lisse les courants<sup>1</sup>.

1. On le constate grâce à la présence d'une étincelle de rupture au niveau de l'interrupteur lorsque l'on ouvre un circuit dans lequel se trouve un composant inductif. L'étincelle permet au courant de s'annuler de manière continue.

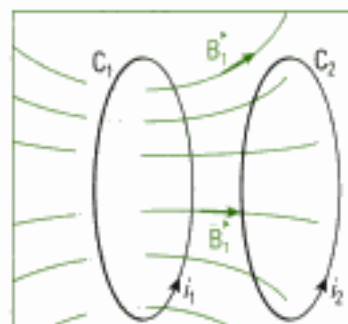


Fig. 9 - Champ magnétique  $\vec{B}_1$  créé par le circuit  $C_1$ .

2. Voir § C.1. pour la justification (démarche identique).

3. On utilise souvent le vocabulaire « flux à travers le circuit  $C_2$  », justifié par le fait que le champ magnétique est à flux conservatif (voir chapitre 1 §D.4.).

4. Il n'est pas question de calculer les intégrales. On veut seulement montrer la proportionnalité avec l'intensité.

## D. Inductance mutuelle

On considère un ensemble de deux circuits  $C_1$  et  $C_2$  parcourus par des courants électriques d'intensité respective  $i_1$  et  $i_2$  (fig. 9). Le circuit  $C_1$  crée dans tout l'espace un champ magnétique  $\vec{B}_1$ , de sorte que le circuit  $C_2$  se trouve traversé par un flux magnétique du champ créé par le circuit  $C_1$ . Un phénomène d'induction se produit alors.

### D.1. Coefficient d'inductance mutuelle

Le circuit  $C_1$  crée dans tout l'espace un champ magnétique  $\vec{B}_1$  dont la norme est proportionnelle à l'intensité  $i_1$ <sup>2</sup>.

Il crée donc, par l'intermédiaire de  $\vec{B}_1$ , un flux magnétique  $\phi_{1 \rightarrow 2}$  à travers une surface  $S_2$  qui s'appuie sur le circuit  $C_2$ <sup>3</sup> :

$$\phi_{1 \rightarrow 2} = \iint_{M \in S_2} \vec{B}_1(M) \cdot \vec{n}_2 dS = \frac{\mu_0 i_1}{4\pi} \iint_{M \in S_2} \left( \oint_{P \in C_1} \frac{d\vec{l} \wedge \vec{PM}}{PM^3} \right) \cdot \vec{n}_2 dS^4.$$

Ce flux est donc proportionnel à  $i_1$ .



### Définition 6

On appelle **coefficient d'inductance mutuelle**  $M_{12}$  des circuits  $C_1$  et  $C_2$  le coefficient de proportionnalité qui existe entre le flux  $\phi_{1 \rightarrow 2}$  induit par le circuit  $C_1$  à travers le circuit  $C_2$  et l'intensité  $i_1$  traversant le circuit  $C_1$  :

$$\phi_{1 \rightarrow 2} = M_{12} i_1.$$

Sa valeur ne dépend que des circuits (forme, nombre de spires, etc...), de leur disposition respective dans l'espace et de la perméabilité absolue  $\mu_0$  du vide.

Le coefficient d'inductance mutuelle est aussi appelé « mutuelle », ou coefficient de mutuelle.

Son unité est le henry (symbole H).

De même, le circuit  $C_2$  crée dans tout l'espace un champ magnétique dont la norme est proportionnelle à l'intensité  $i_2$ . Il crée un flux magnétique  $\phi_{2 \rightarrow 1}$  à travers une surface  $S_1$  qui s'appuie sur le circuit  $C_1$ .

On définit un nouveau coefficient de mutuelle entre les deux circuits :

$$\phi_{2 \rightarrow 1} = M_{21} i_2.$$

### Théorème 1

**Théorème de Neumann**

$$M_{12} = M_{21} = M.$$

Le coefficient de mutuelle entre deux circuits est donc unique.

1. Sa démonstration est hors programme et il est simplement admis dans ce cours.

## D.2. Force électromotrice induite

Exprimons le flux magnétique total dans l'un des circuits, le circuit  $C_2$  par exemple :

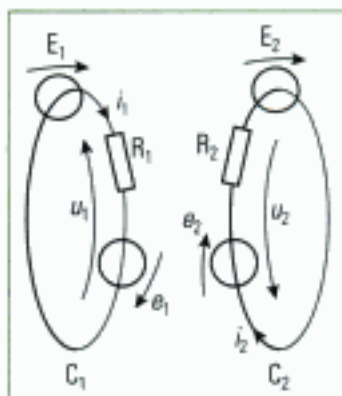
$$\phi_2 = \phi_{p2} + \phi_{1 \rightarrow 2} = L_2 i_2 + M i_1.$$

Conformément à la loi de Faraday, la force électromotrice induite dans le circuit  $C_2$  s'écrit :

$$e_2 = -L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt}.$$

Dans le circuit  $C_1$ , elle vaut :

$$e_1 = -L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt}.$$



**Fig. 10** - Modèle électrique équivalent.

## D.3. Schéma électrique équivalent

On cherche le modèle électrique équivalent à chacun des deux circuits à proximité l'un de l'autre, c'est-à-dire en état d'induction mutuelle (fig. 10).

On note  $R_1$  la résistance électrique du circuit  $C_1$ ,  $E_1$  la force électromotrice qui impose le courant et  $i_1$  la valeur de son intensité.

On écrit la différence de potentiel  $u_1$  qui existe aux bornes du générateur du circuit  $C_1$ , écrite pour lui en convention générateur. Cette différence de potentiel s'écrit donc en convention récepteur pour ce qui est du reste du circuit, constitué ici par la résistance  $R_1$  et la force électromotrice d'induction  $e_1$ .

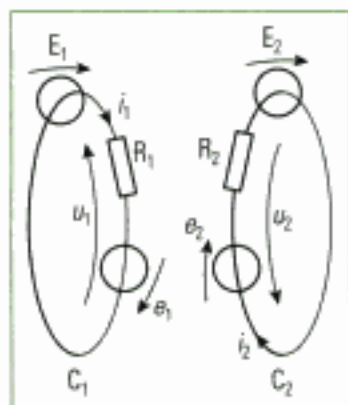


Fig. 10 - Modèle électrique équivalent.

$$u_1 = E_1 = R_1 i_1 - e_1 = R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \quad (1)$$

En prenant des notations analogues pour le circuit  $C_2$ , on écrit de même :

$$u_2 = E_2 = R_2 i_2 - e_2 = R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} \quad (2)$$

## D.4. Bilan énergétique

Pour avoir le bilan des puissances, on multiplie par  $i_1$  l'équation (1) et par  $i_2$  l'équation (2). Il vient :

$$u_1 i_1 = R_1 i_1^2 - e_1 i_1 = R_1 i_1^2 + \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} L_1 i_1^2 \right) + M i_1 \frac{di_2}{dt},$$

$$u_2 i_2 = R_2 i_2^2 - e_2 i_2 = R_2 i_2^2 + \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} L_2 i_2^2 \right) + M i_2 \frac{di_1}{dt}.$$

Ajoutons membre à membre ces deux équations. On obtient :

$$u_1 i_1 + u_2 i_2 = R_1 i_1^2 + R_2 i_2^2 + \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} L_1 i_1^2 \right) + \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} L_2 i_2^2 \right) + \frac{d}{dt} (M i_1 i_2).$$

Pour effectuer un bilan énergétique entre deux instants consécutifs  $t$  et  $t + dt$ , il reste à multiplier par  $dt$  cette dernière équation :

$$u_1 i_1 dt + u_2 i_2 dt = R_1 i_1^2 dt + R_2 i_2^2 dt + d \left( \frac{1}{2} L_1 i_1^2 \right) + d \left( \frac{1}{2} L_2 i_2^2 \right) + d(M i_1 i_2).$$

Cette énergie  $u_1 i_1 dt + u_2 i_2 dt$  a été reçue par l'ensemble des deux circuits<sup>1</sup>, à l'exception des générateurs. C'est d'ailleurs aussi l'énergie fournie par ces générateurs aux circuits entre les instants  $t$  et  $t + dt$ .

L'énergie  $u_1 i_1 dt + u_2 i_2 dt$  fournie par les deux générateurs aux circuits est répartie de la manière suivante :

• Les résistances de chaque circuit  $C_1$  et  $C_2$  absorbent l'énergie  $R_1 i_1^2 dt + R_2 i_2^2 dt$  qui est immédiatement restituée à l'extérieur sous forme d'effet Joule.

• Chaque circuit  $C_1$  et  $C_2$  emmagasine respectivement l'énergie magnétique :

$$d \left( \frac{1}{2} L_1 i_1^2 \right) \text{ et } d \left( \frac{1}{2} L_2 i_2^2 \right).$$

• Enfin, le couplage magnétique entre les deux circuits engendre une énergie  $d(M i_1 i_2)$  emmagasinée par l'ensemble des deux circuits en interaction l'un avec l'autre.

### Propriété 5

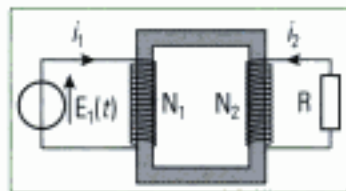
Les énergies  $\frac{1}{2} L_1 i_1^2$  et  $\frac{1}{2} L_2 i_2^2$  sont respectivement les énergies propres emmagasinées par chaque circuit  $C_1$  et  $C_2$ .

L'énergie  $M i_1 i_2$  est l'énergie emmagasinée par l'ensemble des deux circuits en interaction l'un avec l'autre.

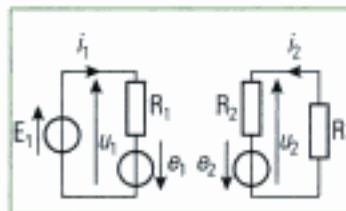
1. En effet, les notations ont été faites en convention récepteur.

2. Cela se fait indépendamment de la présence de l'autre circuit, comme le montre l'étude du paragraphe précédent.

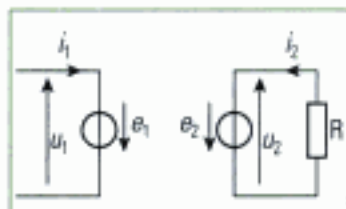
1. En filière PSI, le cours de conversion de puissance aborde plus en détails l'étude du transformateur.



**Fig. 11** - Transformateur. On fera attention à appliquer les conventions de courants employées ci-dessus.

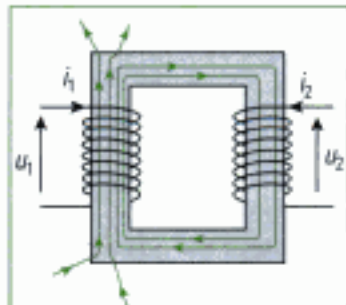


**Fig. 12** - Schéma électrique équivalent.



**Fig. 13** - Schéma électrique équivalent d'un transformateur parfait.

2. Cela revient à négliger les tensions aux bornes des résistances devant les autres tensions. On ne tient alors plus compte des résistances  $R_1$  et  $R_2$ .



**Fig. 14** - Dans un transformateur non parfait, les lignes du champ magnétique (ici représentées en vert) sortent du tore et le flux magnétique n'est alors pas le même partout à l'intérieur du tore.

## E. Application : le transformateur<sup>1</sup>

### E.1. Définition

Un transformateur est constitué par deux bobinages, appelés respectivement primaire et secondaire, enroulés autour d'un tore de matériau ferromagnétique (fig. 11).

L'intérêt du tore est de canaliser les lignes de champ du champ magnétique créé par le primaire, afin que ces lignes de champ traversent en totalité le secondaire : l'induction mutuelle y est alors la plus importante possible.

On note  $C_1$  et  $C_2$  respectivement les circuits primaire et secondaire,  $R_1$  et  $R_2$  leur résistance respective,  $L_1$  et  $L_2$  leur inductance propre respective,  $N_1$  et  $N_2$  leur nombre de spires respectif, et  $M$  le coefficient de mutuelle.

Le primaire contient un générateur de force électromotrice  $E_1(t)$  qui impose une intensité dont la valeur est  $i_1$ .

Aux bornes du secondaire est placé un récepteur modélisé ici par une résistance  $R$ . On note  $i_2$  l'intensité du courant dans le secondaire.

Il y a auto-induction dans chaque circuit, et induction mutuelle entre eux. On note  $e_1$  et  $e_2$  leur force électromotrice d'induction respective et qui tient compte des deux phénomènes (fig. 12).

### E.2. Équations constitutives et modèle parfait

On écrit la loi des mailles pour le primaire et le secondaire, les notations courant-tension aux bornes des bobinages étant prises en convention récepteur :

$$\begin{cases} u_1 = E_1 = R_1 i_1 - e_1 = R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \\ u_2 = -R i_2 = R_2 i_2 - e_2 = R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} \end{cases}$$

Ce sont les **équations constitutives du transformateur**.

#### Définition 7

Le **transformateur** est dit **parfait** (fig. 13) si deux hypothèses sont réalisées :

- l'effet des résistances des bobinages est négligeable<sup>2</sup> ;
- les expressions des coefficients  $L_1$ ,  $L_2$  et  $M$  s'expriment en fonction d'un coefficient  $k$  de la manière suivante :

$$M = k N_1 N_2, \quad L_1 = k N_1^2, \quad L_2 = k N_2^2.$$

La dernière hypothèse correspond à une absence de fuites magnétiques : toutes les lignes de champ magnétique qui traversent le primaire traversent aussi le secondaire (fig. 14). Cela est possible si un noyau de ferromagnétique fermé enferme les deux circuits.

Les équations constitutives s'écrivent alors :

$$\begin{aligned} u_1 &= -e_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}, \\ u_2 &= -e_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} = -R i_2. \end{aligned}$$



On se place dans toute la suite dans le cas où le primaire est alimenté en régime sinusoïdal de pulsation  $\omega$  et on se limite à l'étude de ce régime sinusoïdal forcé.

En utilisant la notation complexe,  $\underline{u}$  désignant le complexe dont la partie réelle est la tension  $u(t)$ , les équations du transformateur idéal sont linéaires. Le passage aux complexes permet de remplacer la dérivée par rapport au temps par une simple multiplication par  $j\omega$  :

$$\underline{u}_1 = j\omega(L_1 \underline{i}_1 + M \underline{i}_2),$$

$$\underline{u}_2 = j\omega(L_2 \underline{i}_2 + M \underline{i}_1).$$

### E.3. Transformateur idéal de tension

On a vu dans le paragraphe précédent que :

$$M = kN_1N_2, L_1 = kN_1^2, L_2 = kN_2^2.$$

Les flux magnétiques à travers le primaire  $\Phi_1$  et le secondaire  $\Phi_2$  s'écrivent :

$$\Phi_1 = L_1 i_1 + M i_2 = kN_1^2 i_1 + kN_1N_2 i_2$$

$$\text{et } \Phi_2 = L_2 i_2 + M i_1 = kN_2^2 i_2 + kN_1N_2 i_1.$$

De ce fait, les flux à travers une section du bobinage primaire  $\Phi_1$  et du bobinage secondaire  $\Phi_2$  s'écrivent :

$$\Phi_1 = \frac{L_1 i_1 + M i_2}{N_1} = kN_1 i_1 + kN_2 i_2$$

$$\text{et } \Phi_2 = \frac{L_2 i_2 + M i_1}{N_2} = kN_2 i_2 + kN_1 i_1.$$

On observe que :

$$\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi.$$

Cela s'explique par le fait que le flux magnétique est le même à travers toute section du tore ferromagnétique car celui-ci canalise parfaitement les lignes du champ magnétique.

Les forces électromotrices induites dans le bobinage primaire  $e_1$  et dans le bobinage secondaire  $e_2$  sont égales à :

$$e_1 = -N_1 \frac{d\Phi}{dt} \quad \text{et} \quad e_2 = -N_2 \frac{d\Phi}{dt}.$$

On trouve alors pour un transformateur parfait :

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{e_2}{e_1} = \frac{N_2}{N_1} = m,$$

où  $m$  désigne le rapport de transformation.

On note  $U_1$  et  $U_2$  les valeurs efficaces des tensions aux bornes du primaire et du secondaire, il vient :

#### Propriété 6

Le rapport de transformation de tension du transformateur parfait s'écrit :

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{N_2}{N_1} = m,$$

où  $m$  désigne le rapport de transformation.

On dit que le transformateur se comporte comme un **transformateur idéal de tension**.

1. Faire attention à la convention d'orientation des bobinages pour le primaire et le secondaire (le flux permet d'orienter les bobinages grâce à la règle du tire-bouchon) (fig. 15).

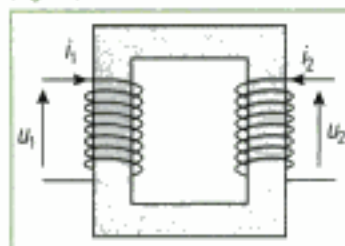
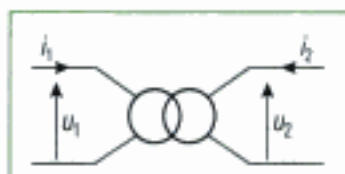


Fig. 15 - Convention d'orientation des bobinages.

2. On a alors :  $\begin{cases} M = m L_1 \\ L_2 = m^2 L_1 \end{cases}$



**Fig. 16** - Symbole du transformateur parfait de rapport de transformation  $m$ .

Le transformateur permet donc d'élever ou d'abaisser la valeur efficace d'une tension. EDF utilise cette propriété pour distribuer son énergie dans tout le réseau. Le transport de l'énergie se fait par des lignes à haute tension pour réduire les pertes par effet Joule, du fait que le courant est plus faible. Il faut donc un transformateur « élévateur de tension » sur le site de production, et un transformateur « abaisseur de tension » sur le site de consommation.

#### Remarque

Le résultat  $\frac{U_2}{U_1} = \frac{N_2}{N_1} = m$  reste vérifié si la résistance  $R$  devient infinie, ce qui revient à prendre l'intensité nulle dans le secondaire :  $i_2 = 0$ . Les équations donnent alors :

$$u_1 = j\omega L_1 i_1, u_2 = j\omega M i_1 \text{ et par suite : } \frac{u_2}{u_1} = \frac{M}{L_1} = \frac{N_2}{N_1}.$$

C'est une solution facile pour retrouver le rapport de transformation.

## E.4. Transformateur idéal de courant

Lorsque la résistance au secondaire est très faible, tout se passe comme si on avait  $R = 0$ , c'est-à-dire  $u_2 = 0$ .

La loi des mailles aux bornes du secondaire s'écrit alors :

$$u_2 = 0 = j\omega(L_2 i_2 + M i_1), \text{ soit } \frac{i_2}{i_1} = -\frac{M}{L_2} = -\frac{N_1}{N_2} = -\frac{1}{m}.$$

Cette dernière relation reste valable pour  $R < +\infty$ . En notant  $I_1$  et  $I_2$  les valeurs efficaces des intensités des courants traversant le primaire et le secondaire, on obtient :

#### Propriété 7

Le rapport de transformation de courant du transformateur parfait s'écrit :

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{N_1}{N_2} = \frac{1}{m},$$

où  $m$  désigne le rapport de transformation.

On dit que le transformateur se comporte comme un **transformateur idéal de courant**.

Le transformateur permet d'élever ou d'abaisser la valeur efficace d'un courant. Ce mode de fonctionnement est utilisé par exemple pour mesurer les courants de fortes intensités. Les ampèremètres usuels ne supportent pas d'intensité supérieure à 10 A. Pour pouvoir mesurer de fortes intensités électriques, on fait alors appel à un transformateur qu'on nomme « abaisseur de courant » en plaçant l'ampèremètre sur le secondaire : c'est le principe des pinces ampèremétriques.

#### Remarque

La puissance reçue dans le bobinage primaire est :  $p_1 = u_1 i_1$  tandis que celle fournie par le bobinage secondaire est :  $p_2 = -u_2 i_2$ . On voit donc en se servant des relations précédentes que  $p_1 = p_2$  :

Le transformateur parfait transmet intégralement l'énergie du circuit primaire au secondaire.

# L'essentiel

## ✓ Force électromotrice d'induction

- Le **champ électromoteur**  $\vec{E}_m$  est défini par la relation :

$$\vec{E}_m = - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}.$$

- La **force électromotrice d'induction**  $e$  entre deux points A et B s'écrit :

$$e = \int_A^B \vec{E}_m \cdot d\vec{l}.$$

$e$  est algébrique et se calcule pour un circuit ouvert ou fermé.

La flèche du générateur est orientée de A vers B le long du parcours AB, c'est-à-dire dans le sens de la circulation et de l'intensité.

- La **loi de Faraday** s'écrit pour un circuit fermé :

$$e = - \frac{d\phi}{dt} = - \frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS,$$

où S est « la surface » du circuit et  $\phi$  le flux magnétique. La flèche du générateur est orientée dans le même sens que le circuit.

- La **loi de Lenz** énonce que la force électromotrice induite a un signe tel que ses effets tendent à s'opposer aux causes qui lui ont donné naissance.

## ✓ Auto-induction

- La **force électromotrice d'auto-induction**  $e$  d'un circuit s'écrit :

$$e = - \frac{d\phi_p}{dt} = - L \frac{di}{dt},$$

où  $\phi_p$ , L et  $i$  sont respectivement le flux propre, l'inductance propre et l'intensité du circuit.

- L'**énergie totale d'auto-induction emmagasinée** dans un circuit est :

$$\frac{1}{2} Li^2.$$

## ✓ Inductance mutuelle

- Le **coefficient de mutuelle** M entre deux circuits (1) et (2) est défini par les relations :

$$\phi_{1 \rightarrow 2} = Mi_1 \quad \text{et} \quad \phi_{2 \rightarrow 1} = Mi_2,$$

où  $\phi_{\alpha \rightarrow \beta}$  correspond au flux créé par le circuit ( $\alpha$ ) à travers le circuit ( $\beta$ ), et  $i_\alpha$  l'intensité parcourant le circuit ( $\alpha$ ).

- Les **forces électromotrices d'induction mutuelle** s'écrivent pour chaque circuit :

$$e_1 = - M \frac{di_2}{dt} \quad \text{et} \quad e_2 = - M \frac{di_1}{dt}.$$

- L'énergie d'induction mutuelle est :  $Mi_1i_2$ .

## ✓ Transformateur parfait

- Le rapport de transformation de tension s'écrit :

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{N_2}{N_1},$$

où  $N_\alpha$  et  $U_\alpha$  désignent respectivement le nombre de spires du circuit ( $\alpha$ ) et la tension efficace aux bornes de celui-ci.



On dit alors que le transformateur se comporte comme un **transformateur idéal de tension**.

• Le rapport de transformation de courant s'écrit :

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{N_1}{N_2},$$

où  $N_1$  et  $I_1$  désignent respectivement le nombre de spires du circuit (1) et l'intensité traversant celui-ci.

On dit alors que le transformateur se comporte comme un **transformateur idéal de courant**.

## Mise en œuvre

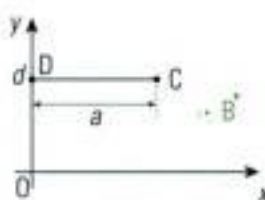
### Méthode n° 1

#### Comment calculer une différence de potentiel dans un circuit ouvert et placé dans un champ magnétique variable ?

Dans un repère cartésien, exprimer la différence de potentiel  $V_D - V_C$  que l'on mesure aux bornes d'un barreau conducteur rectiligne placé entre les points  $D(0, d, 0)$  et  $C(a, d, 0)$  et plongé dans un champ magnétique uniforme et variable  $\vec{B} = \alpha t \vec{u}_z$  ( $\alpha$  est une constante).

On vérifiera que le potentiel vecteur en un point  $M(x, y, z)$  quelconque

peut s'écrire  $\vec{A} = \frac{\vec{B} \wedge \vec{OM}}{2}$ .



#### → Savoir faire

- ❶ Lorsque le circuit est ouvert, la loi de Faraday ne peut pas être utilisée et il faut calculer le champ électromoteur  $\vec{E}_m$ . On doit alors déterminer l'expression du potentiel vecteur  $\vec{A}$ . Conformément au programme, l'énoncé apporte généralement une aide pour ce calcul.
- ❷ En déduire l'expression du champ électromoteur  $\vec{E}_m$ .
- ❸ Calculer la circulation du champ électromoteur  $\vec{E}_m$  entre les deux points D et C, qui représente la force électromotrice d'induction  $\varepsilon$ .
- ❹ Représenter le schéma électrique équivalent entre les deux points en plaçant le générateur dont la force électromotrice  $\varepsilon$  a été calculée en ❸.
- ❺ Appliquer la loi des mailles pour déterminer la différence de potentiel  $V_D - V_C$ .

#### → Application

❶ On calcule le potentiel vecteur  $\vec{A}$  proposé, puis on vérifiera qu'il est bien potentiel vecteur du champ magnétique  $\vec{B}$ .

$$\vec{A} = \frac{\vec{B} \wedge \vec{OM}}{2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -yB \\ xB \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Vérifions que cette expression est bien un potentiel vecteur du champ  $\vec{B}$  :

$$\text{rot } \vec{A} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -\frac{yB}{2} \\ \frac{xB}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{B}{2} + \frac{B}{2} \end{pmatrix} = \vec{B}.$$

$\vec{A} = \frac{\vec{B} \wedge \vec{OM}}{2}$  est donc bien le potentiel vecteur du champ magnétique  $\vec{B}$ .

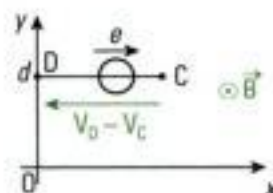
② Le champ électromoteur  $\vec{E}_m$  est défini par :

$$\vec{E}_m = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \begin{pmatrix} \frac{\alpha y}{2} \\ -\frac{\alpha x}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

③ On calcule la circulation de ce champ électromoteur  $\vec{E}_m$  entre les deux points D et C ( $d\vec{l}$  va de D vers C) et on obtient la force électromotrice d'induction  $e$  :

$$e = \int_D^C \vec{E}_m \cdot d\vec{l} = \int_0^a \begin{pmatrix} \frac{\alpha y}{2} \\ -\frac{\alpha x}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \int_0^a \frac{\alpha d}{2} dx = \frac{\alpha da}{2}.$$

④ Le schéma doit faire apparaître un générateur correspondant à la force électromotrice d'induction et dont la flèche est orientée dans le sens du calcul de la circulation.



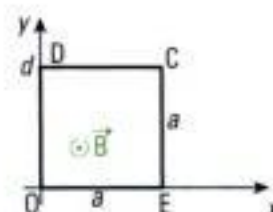
⑤ On applique la loi des mailles, sachant que le circuit est ouvert. Il n'est donc parcouru par aucun courant et on a :

$$V_D - V_C = -e = -\frac{\alpha da}{2}.$$

## Méthode n° 2

**Comment calculer la force électromotrice d'induction  $e$  qui apparaît dans un circuit fermé placé dans un champ magnétique variable ?**

Exprimer la force électromotrice d'induction  $e$  qui apparaît dans un circuit OECD carré de côté  $a$  du plan Oxy (figure ci-contre). Ce circuit est plongé dans un champ magnétique uniforme et variable  $\vec{B} = \alpha t \vec{u}_z$ , où  $\alpha$  est une constante.





## → Savoir faire

- ① Calculer le flux  $\phi$  du champ magnétique à travers ce circuit. Repérer le sens de la normale  $\vec{n}$  choisie et noter le sens positif du courant associé.
- ② Calculer la force électromotrice  $\varepsilon$  d'induction avec la loi de Faraday.

## → Application

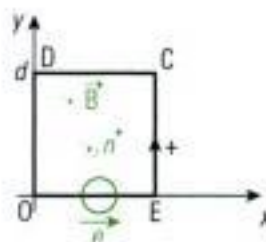
① On prend comme surface celle du circuit. Celui-ci est très généralement plan et il délimite une surface plane, ici carrée de côté  $a$ . On oriente la normale  $\vec{n}$  à la surface dans le sens du champ magnétique  $\vec{B}$ . On donne de fait un sens conventionnel de parcours dans le circuit, lié au choix de la normale via la « règle du tire-bouchon ».

Le flux magnétique s'écrit alors :

$$\phi = \iint_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS = B \times S = a^2 \alpha t, \text{ car } \vec{B} \text{ est uniforme.}$$

② On en déduit la force électromotrice d'induction  $\varepsilon$  en appliquant la loi de Faraday :

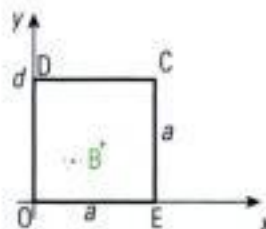
$$\varepsilon = - \frac{d\phi}{dt} = - \frac{d}{dt} (a^2 \alpha t) = - a^2 \alpha < 0.$$



## Méthode n° 3

### Comment calculer l'intensité $i$ du courant induit qui circule dans un circuit fermé placé dans un champ magnétique variable ?

Exprimer l'intensité  $i$  du courant induit qui circule dans un circuit OECD carré de côté  $a$  du plan Oxy (figure ci-contre). Ce circuit a pour résistance  $R$  et est plongé dans un champ magnétique uniforme et variable  $\vec{B} = \alpha t \vec{u}_z$ , où  $\alpha$  est une constante.



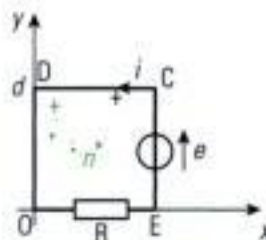
## → Savoir faire

- ① Calculer la force électromotrice d'induction  $\varepsilon$  qui apparaît dans le circuit (voir méthode n° 2).
- ② Représenter le schéma électrique équivalent du circuit en y faisant figurer la force électromotrice d'induction  $\varepsilon$ . Le sens de la flèche du générateur doit être conforme au sens choisi conventionnellement pour le calcul de la force électromotrice d'induction  $\varepsilon$ . Appliquer la loi des mailles pour trouver l'intensité  $i$ .

## → Application

① On reprend le résultat de la méthode n° 2, en n'oubliant pas le sens de la normale. On rappelle le résultat  $\varepsilon = - a^2 \alpha < 0$ .

② On place le générateur de force électromotrice  $\varepsilon$  sur une des branches du circuit fermé, en prenant soin d'orienter la flèche du générateur dans le sens positif conventionnellement choisi. Le sens intensité est toujours choisi identique à celui du circuit.





Il reste à appliquer la loi des mailles dans le circuit :

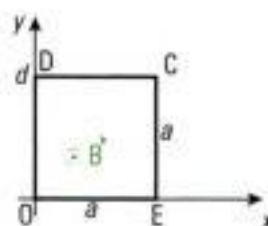
$$\mathcal{E} - Ri = 0, \text{ qui donne } i = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{-a^2\alpha}{R} < 0.$$

L'intensité véritable circule donc dans le sens contraire au sens conventionnel choisi.

### Méthode n° 4

## Comment vérifier sans calcul le sens de l'intensité $i$ du courant induit qui circule dans un circuit fermé placé dans un champ magnétique variable ?

Déterminer le sens de l'intensité  $i$  du courant induit qui circule dans un circuit OECD carré de côté  $a$  du plan Oxy (figure ci-contre). Ce circuit a pour résistance  $R$  et est plongé dans un champ magnétique uniforme et variable  $\vec{B} = \alpha t \vec{u}_z$ , où  $\alpha$  est une constante.



### → Savoir faire

- ❶ L'induction est provoquée par la variation du flux magnétique  $\phi$  à travers le circuit. Trouver le sens de cette variation.
- ❷ Le courant induit  $i$  a un sens tel qu'il crée un champ magnétique  $\vec{B}'$  dont le flux s'oppose à la variation du champ inducteur. Trouver le sens du champ magnétique  $\vec{B}'$  créé par le courant induit  $i$ .
- ❸ En déduire le sens du courant induit  $i$  qui circule dans le circuit en associant le sens du champ magnétique  $\vec{B}'$  créé au sens du courant via la « règle du tire-bouchon ».

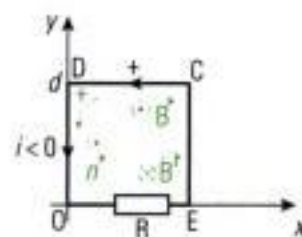
### → Application

- ❶ Cette variation est due à l'augmentation du champ magnétique  $\vec{B}$ .

Le flux augmente donc :  $\frac{d\phi}{dt} > 0$ .

- ❷ Le champ magnétique  $\vec{B}'$  créé par le courant s'opposera à l'augmentation du champ inducteur  $\vec{B}$ , il est donc opposé à  $\vec{B}$  : il est dirigé selon le sens négatif de l'axe Oz.

- ❸ L'application de la « règle du tire-bouchon » nous donne le sens du courant induit  $i$  qui crée le champ  $\vec{B}'$  : ce courant doit circuler dans le sens inverse au sens conventionnel positif du circuit. On vérifiera le résultat algébrique obtenu dans la méthode précédente.



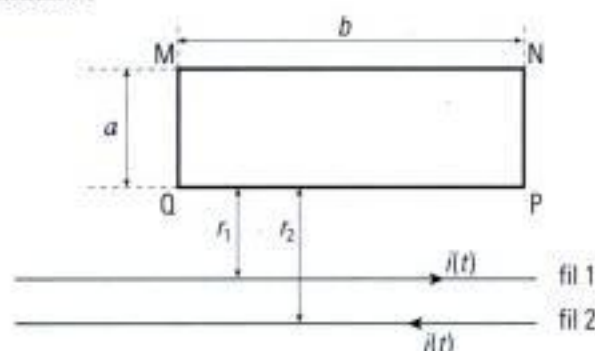
# Exercices

## Niveau 1

### Ex. 1

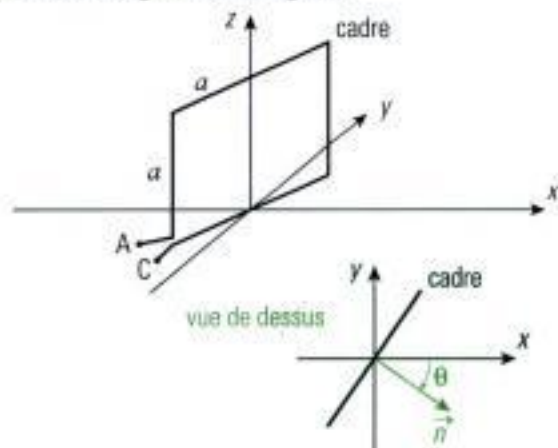
Deux conducteurs 1 et 2 filiformes et parallèles, transportent un même courant d'intensité  $i(t) = I_0 \cos \omega t$ , dans des sens opposés. Un cadre rectangulaire MNPQ est fixé dans le plan des conducteurs.

- 1) Déterminer le flux magnétique  $\Phi$  à travers le cadre.
- 2) Déterminer la force électromotrice induite  $\epsilon(t)$  dans le cadre et donner le sens conventionnel du courant induit  $i'$ .



### Ex. 2

On dispose un cadre carré fixe de côté  $a$  comportant  $N$  spires d'un fil conducteur d'extrémités A et C dans un champ magnétique  $\vec{B} = B_0 \cos \omega t \vec{u}_y$ . La normale au cadre fait un angle  $\theta$  avec  $\vec{u}_x$ . L'angle  $\theta$  est orienté, il est donc négatif sur la figure.



- 1) Calculer la force électromotrice  $\epsilon(t)$  qui apparaît entre les bornes de sortie A et C du cadre.
- 2) Vérifier que le potentiel vecteur en un point M quelconque peut s'écrire  $\vec{A} = \frac{\vec{B} \wedge \vec{OM}}{2}$ .
- 3) Calculer par une autre méthode la force électromotrice  $\epsilon(t)$ .
- 4) Étudier les variations de l'amplitude  $\epsilon_0$  de  $\epsilon(t)$  en fonction de la pulsation  $\omega$  du champ magnétique et de l'angle  $\theta$ . On tracera le graphe de l'amplitude de  $\epsilon(t)$  en fonction de  $\theta$ .

5) Application numérique :  $B_0 = 1 \mu T$ ,  $a = 10 \text{ cm}$ ,  $f = 150 \text{ kHz}$ ,  $\theta = \frac{\pi}{2}$  et  $N = 100$ . Calculer  $\epsilon_0$ .

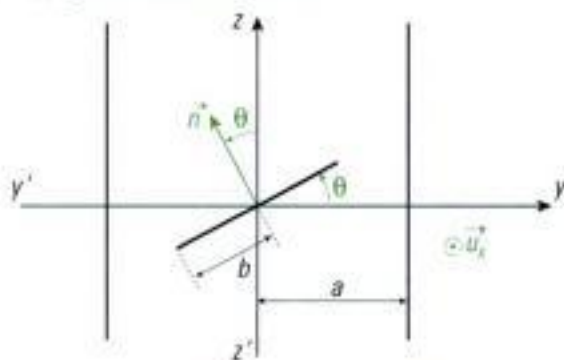
### Ex. 3

On dispose d'un solénoïde (S) très long, de longueur  $d$ , de rayon  $a$ , d'axe  $Oz$ , comportant  $N$  spires jointives.

Le solénoïde, parcouru par un courant d'intensité  $i$ , est placé dans l'air assimilé au vide.

- 1) En assimilant le solénoïde à une surface parcourue par un courant, donner l'expression de sa densité  $\vec{J}_S$ .
- 2) Déterminer l'expression du vecteur champ magnétique  $\vec{B}$  en tout point de l'espace, en supposant que ce champ est nul en un point infiniment éloigné de l'axe de révolution du solénoïde.
- 3) On place à l'intérieur du solénoïde une bobine plate, circulaire de rayon  $b < a$ , comportant  $N$  spires, dont la normale fait un angle  $\theta$  avec l'axe  $Oz$  du solénoïde. Cette bobine constitue un circuit électrique fermé de résistance  $R$ , d'inductance propre  $L$ . Le courant parcourant le solénoïde (S) est sinusoïdal, d'amplitude  $I_0$  et de pulsation  $\omega$ , nul à  $t = 0$ .

Déterminer l'expression de l'amplitude  $I'$  de l'intensité  $i'(t)$  qui traverse la bobine.



- 4) Déterminer l'expression de l'amplitude  $I'$  de l'intensité  $i'(t)$  qui traverse la bobine si celle-ci entoure le solénoïde ( $b > a$ ). Il faut évidemment considérer que  $\theta = 0$ .

## Niveau 2

### Ex. 4

Un fil rectiligne infiniment long est parcouru par un courant d'intensité  $i(t) = I_0 \cos \omega t$ . On note  $(Oz)$  la direction du fil, on note positivement l'intensité dans le sens de  $z'z$ .

- 1) Déterminer le champ magnétique  $\vec{B}(M, t)$  en tout point M de l'espace.
- 2) Définir la direction et les variables dont dépend le potentiel vecteur  $\vec{A}$  en M.

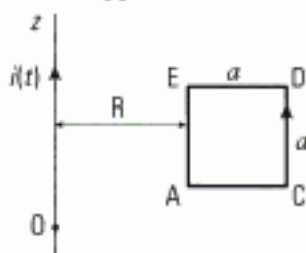


On donne la solution de l'équation de Poisson dans le cas d'un fil infini,  $\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\text{fil}} \frac{\vec{i}(t)}{PM} d\vec{l}(P)$  où  $d\vec{l}(P)$  est un déplacement élémentaire autour du point P situé sur le fil.

3) Calculer le potentiel vecteur  $\vec{A}$  en M, que l'on prendra nul à la distance R de l'axe Oz.

4) En déduire le champ électromoteur  $\vec{E}_m$  en M.

5) Une bobine plane, de N spires, a la forme d'un carré ACDE de côté a. Deux cotés sont parallèles à l'axe Oz, à la distance R et R + a de l'axe. Le fil est dans le plan de la bobine. On note  $\epsilon$  la force électromotrice d'induction apparaissant dans la bobine.



a) Calculer  $\epsilon$  en utilisant le potentiel vecteur.

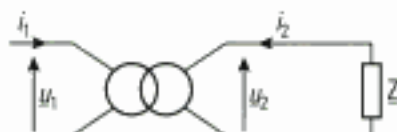
b) Calculer  $\epsilon$  en utilisant la loi de Faraday.

6) Quel est le coefficient d'inductance mutuelle M entre le fil et la bobine ?

### Ex. 5

Un transformateur de tension, supposé parfait, a un rapport de transformation  $m = 0,22$ . On mesure au primaire une tension efficace de valeur

$U_1 = 1000$  V, de fréquence 50 Hz. Le secondaire alimente un moteur consommant une puissance moyenne de  $P = 5$  kW, de facteur de puissance ( $\cos\phi$ ) = 0,94. L'impédance équivalente  $Z$  du moteur est supposée inductive.



1) Le transformateur est parfait donc il n'engendre pas de pertes de puissance. La puissance instantanée à l'entrée est la même qu'en sortie. A partir de cette propriété, trouver la relation entre courant d'entrée et de sortie.

2) Le transformateur est connecté sur une charge d'impédance complexe  $Z$ . Établir l'expression de l'impédance équivalente vue de l'entrée en fonction de  $Z$  et  $m$ .

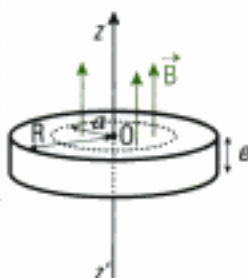
3) Déterminer littéralement, puis numériquement l'impédance complexe équivalente  $Z_e$  vue de l'entrée lorsque le moteur est connecté en sortie du transformateur.

4) La ligne qui alimente le primaire a une résistance  $R = 1 \Omega$ . Calculer la puissance totale fournie par l'alimentation.

5) Comparer ce résultat à ce que l'on aurait sans utiliser de transformateur, le moteur étant relié à la même ligne alimentée sous 220 V.

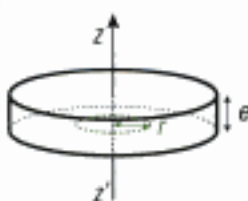
### Ex. 6

Un disque conducteur, de conductivité  $\gamma$ , de rayon R, d'épaisseur  $e$ , est placé dans un champ magnétique uniforme, parallèle à l'axe Oz du disque, de valeur  $B(t) = B_0 \cos\omega t$  dans la région  $r < a < R$  et de valeur nulle ailleurs. Il s'établit en tout point M du disque des courants volumiques induits de densité  $j(M, t)$  (courants de Foucault) dont on cherche l'expression.



1) Montrer que cette densité de courant est de direction orthoradiale. De quelles variables dépend cette densité a priori ?

2) On imagine un cercle de rayon  $r$  tracé dans le disque. Quelle est la relation entre le champ électromoteur  $\epsilon$  induit qui existe sur ce cercle et le flux de  $\vec{B}$  à travers ? En déduire que  $j$  ne dépend que d'une seule variable d'espace.



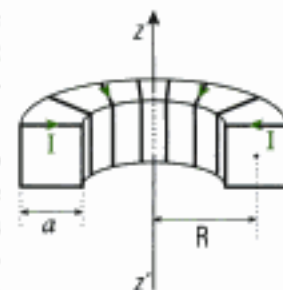
3) En déduire la densité de courant volumique induit  $j(M, t)$  en tout point M du disque.

4) Exprimer la puissance volumique dissipée par effet Joule dans le disque.

5) Exprimer la puissance moyenne dissipée par effet Joule dans le disque.

### Ex. 7

Un solénoïde a la forme d'un tore de rayon R. Il est constitué de N spires carrées, jointives et de côté a.



1) Déterminer le champ magnétique  $\vec{B}$  créé par le solénoïde lorsque ses spires sont parcourues par un courant d'intensité  $I(t)$  (voir la vue en coupe).

2) Calculer le flux propre  $\Phi$  de ce champ  $\vec{B}$  à travers le solénoïde.

3) En déduire l'inductance propre L du solénoïde.

4) On place sur l'axe  $z z'$  un fil infiniment long parcouru par un courant  $I'$  (le circuit se referme à grande distance du tore).  $I'$  est orienté dans le sens de l'axe  $z z'$ .

a) Déterminer le flux  $\Phi'$  du champ magnétique  $\vec{B}'$  créé par le fil à travers le solénoïde.



b) En déduire l'inductance mutuelle  $M$  entre les deux circuits.

5) On suppose que  $I(t) = I_0 \cos(\omega t)$ , et on mesure l'intensité  $i(t)$  du courant induit dans le tore que l'on ferme sur un ampèremètre, la résistance totale du circuit torique valant  $R'$ .

a) Déterminer la valeur  $i(t)$  de l'intensité du courant qui traverse le circuit torique en régime sinusoïdal établi.

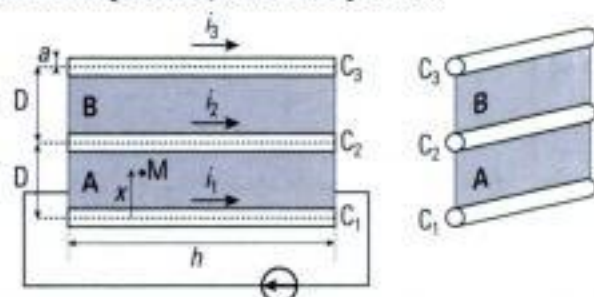
b) Application numérique :  $N = 1000$  ;  $a = 2$  cm ;  $R = 5$  cm ;  $\omega = 100\pi$  rad·s<sup>-1</sup> ;  $R' = 1$  Ω. Calculer  $i(t)$ .

c) Que se passe-t-il pour  $L\omega$  très grand devant  $R'$  ? Commenter.

## Niveau 3

### Ex. 8 Effet pelliculaire

On considère trois conducteurs cylindriques  $C_1$ ,  $C_2$  et  $C_3$ , supposés très longs de même longueur  $h$  et de même rayon  $a$ . Leurs axes sont parallèles et sont situés dans un même plan à une distance  $D$  les uns des autres. Les trois conducteurs ont chacun une résistance  $r$  par unité de longueur, ils sont disposés en parallèle et reliés entre eux par deux plaques conductrices A et B de résistance et d'inductance négligeable, et ils sont alimentés par une tension sinusoïdale de pulsation  $\omega$  :  $u(t) = U_0 e^{j\omega t}$ . Dans cet exercice, on suppose valables les équations des états quasi-stationnaires et on tient compte des phénomènes d'induction. En effet, il s'agit de modéliser de notre mieux ce qu'il se passe dans les fils électriques « classiques » constitués de tresses (assemblage de fils de cuivre en parallèle) et utilisés partout.



1)  $i_1$ ,  $i_2$  et  $i_3$  désignent les trois courants apparaissant respectivement dans chacun des trois conducteurs. Montrer que l'on a nécessairement  $i_1 = i_3$ .

2) On s'intéresse à la plaque A se trouvant entre les conducteurs  $C_1$  et  $C_2$ . Calculer en fonction de  $i_1$  et  $i_2$  le champ magnétique total  $\vec{B}$  produit en un point M de A, à une distance  $x$  de l'axe du conducteur  $C_1$ .

3) Déterminer le flux magnétique  $\phi$  à travers la surface de A. On supposera ensuite que  $a \ll D \ll h$  : simplifier l'expression de  $\phi$ .

4) Quelle est la force électromotrice  $\epsilon$  d'induction apparaissant dans le circuit  $\Gamma$  formé par le bord de la plaque conductrice A ?

5) Quelle relation supplémentaire existe-t-il entre les deux courants  $i_1$  et  $i_2$  et la force électromotrice  $\epsilon$  ? En déduire que le rapport des deux valeurs complexes des intensités  $i_1$  et  $i_2$  et peut se mettre sous la forme  $\frac{i_2}{i_1} = 1 - \frac{\ln 2}{f(\omega)}$ , où la fonction complexe  $f(\omega)$  est à déterminer.

6) Calculer le rapport des deux intensités en courant continu, puis ensuite pour une pulsation  $\omega = +\infty$ . Interpréter les résultats.

### Ex. 9

On considère un solénoïde « infini » d'axe Oz, de rayon  $a$  et constitué de  $n$  spires par unité de longueur parcouru par un courant  $i(t) = I_0 \cos \omega t$ .

On entoure ce solénoïde d'une portion de spire ( $S_1$ ) entre les points A et B de rayon  $R > a$  et de résistance  $R_1$ .

On rappelle qu'un solénoïde parcouru par un courant variable  $i(t)$  engendre un champ magnétique :

$$\vec{B}(r < a) = \mu_0 n i(t) \vec{u}_z \quad \text{et} \quad \vec{B}(r > a) = \vec{0}.$$

1) a) Déterminer le potentiel vecteur  $\vec{A}$  en tout point.

b) En déduire le champ électromoteur  $\vec{E}_m$  en un point M de ( $S_1$ ) en fonction de  $n$ ,  $a$ ,  $R$  et  $\frac{di(t)}{dt}$ .

c) Calculer la différence de potentiel  $V_A - V_B$ .

2) On remplace ( $S_1$ ) par une portion de spire complémentaire de la précédente ( $S_2$ ) entre les points A et B. ( $S_2$ ) est de rayon  $R > a$  et possède une résistance  $R_2$ .

Déterminer la différence de potentiel  $V'_A - V'_B$ .

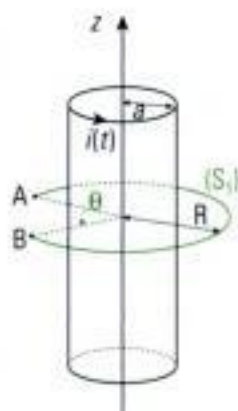
3) On connecte les deux portions entre elles. Déterminer la valeur et le sens du courant  $i_1(t)$  traversant cette spire.

4) On considère la spire (S) fermée constituée de la réunion des deux portions précédentes.

a) En utilisant la loi de Faraday, donner la valeur de la force électromotrice  $\epsilon_s$  dans la spire (S).

b) En déduire le courant  $i_1(t)$  traversant la spire (S).

5) On ajoute en parallèle avec la portion ( $S_2$ ) une portion de spire ( $S_3$ ) de résistance  $R_3$  de forme quelconque. Déterminer l'expression du courant  $i_3$  dans cette portion de spire.



### Ex. 10 Chauffage par induction

On rappelle qu'un solénoïde long, d'axe Oz, comprenant  $n$  spires circulaires de rayon  $a$  par unité de longueur, parcourues par un courant d'intensité



$I(t) = I_0 \cos(\omega t)$  crée en un point M de son intérieur un champ magnétique  $\vec{B} = \mu_0 n I(t) \vec{u}_z$ , et un champ nul à l'extérieur.

On donne  $n = 10000$ ,  $a = 5$  cm,  $I_0 = 10$  A.

1) On cherche un champ électrique  $\vec{E}_m$  à l'intérieur du solénoïde.

a) Donner sa direction et les variables dont il dépend, dans un système de coordonnées bien choisi.

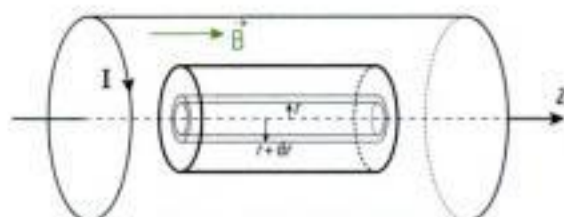
b) Calculer le flux magnétique  $\Phi$  à travers le contour constitué par une ligne de champ électrique  $\vec{E}_m$ .

c) Appliquer la loi de Faraday, et en déduire l'expression du champ électrique  $\vec{E}_m$  induit.

2) Calculer la puissance moyenne  $\langle P_j \rangle$  dissipée par effet Joule dans un cylindre métallique de conductivité  $\sigma$ , d'axe Oz, de hauteur L, et de section circulaire de rayon  $b < a$ .

A.N. :  $\sigma = 6 \cdot 10^7 \Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$ ,  $L = 0,5$  m,  $b = 1$  cm.

3) On suppose le cylindre métallique long précédent.



a) On découpe spirituellement un cylindre creux de longueur L et d'épaisseur dr dans le cylindre précédent. Ce cylindre creux est alors considéré comme un solénoïde. Déterminer le champ magnétique  $d\vec{B}'$  créé sur l'axe Oz par ce solénoïde imaginaire, siège des courants dans le métal entre les cylindres de rayons r et r + dr.

b) En déduire le champ magnétique  $\vec{B}'$  total créé par l'ensemble des courants induits.

c) A quelle condition sur b l'amplitude de  $\vec{B}'$  est-elle négligeable devant l'amplitude de  $\vec{B}$  (on fera apparaître  $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \sigma \omega}}$ ) ? Commenter.

## Indications

### Ex. 1

1) Utiliser le théorème d'Ampère pour déterminer le champ magnétique créé par un fil infini. En utilisant le théorème de superposition, on trouve le champ magnétique créé par les deux fils.

### Ex. 2

Avec la notation  $\theta$  comme angle entre le champ magnétique et la normale au cadre, on calcule le flux du champ magnétique  $\vec{B}$  à travers le cadre en fonction de  $\theta$ .

Il ne faut pas oublier que le flux à travers un cadre comportant N spires est égal à N fois le flux à travers une spire.

### Ex. 3

2) On considère le solénoïde infiniment long (on néglige les effets de bord).

3) Le flux du champ magnétique est constitué du flux propre de la bobine et du flux du champ engendré par le solénoïde.

### Ex. 4

3) On utilise la relation liant le champ magnétique et le potentiel vecteur :  $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$ .

### Ex. 6

2) Supposer que  $\vec{E} = \vec{E}_m$  et utiliser l'équation de Maxwell-Faraday.

### Ex. 7

5) a) On utilise la notation complexe.

### Ex. 8

1) On utilise des raisons de symétries.

### Ex. 9

1) a) Le potentiel vecteur  $\vec{A}$  est continu et défini en tout point.

3) La différence de potentiel est la même aux bornes des deux portions de spire.

5) Calculer le flux du champ magnétique à l'intérieur de la surface délimitée par les portions de spire ( $S_2$ ) et ( $S_3$ ). En déduire la f.e.m dans la portion ( $S_1$ ). Par application de la loi des mailles et des nœuds, déterminer le courant  $i_3$ .

# Solutions des exercices

## Exercices de niveau 1

### Exercice 1

1) • Dans un premier temps, on détermine le champ magnétique dans tout l'espace en utilisant le théorème d'Ampère.



On va se placer ici dans l'ARQS : on va supposer que l'on travaille dans les basses fréquences. Dans ce cas, l'équation de Maxwell-Ampère est :  $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$  et le théorème d'Ampère s'écrit comme en première année :  $\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$ , où  $I$  est l'intensité traversant le contour  $\Gamma$ .

On étudie le champ magnétique  $\vec{B}(M, t)$  créé par un fil infini parcouru par un courant  $i$ .

On utilise les coordonnées cylindriques et la base associée  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ . On oriente le fil suivant  $\vec{u}_z$  de sorte que le courant soit aussi orienté dans le sens de  $\vec{u}_z$ .

Soit un point  $M$  de l'espace situé à une distance  $r$  du fil, on étudie les symétries et invariances afin de trouver la direction du champ magnétique et les variables dont il dépend.

Le plan  $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$  est un plan de symétrie. Le champ magnétique  $\vec{B}$  est donc dirigé suivant  $\vec{u}_\theta$ .

La distribution de courant est invariante par rotation d'angle  $\theta$  et par translation suivant  $\vec{u}_z$ . Le champ magnétique  $\vec{B}$  ne dépend donc que de la variable  $r$ .

D'où :  $\vec{B}(M, t) = B(r, t) \vec{u}_\theta$ .

On applique le théorème d'Ampère sur un contour circulaire  $\Gamma$  de rayon  $r$  placée à une cote  $z$  constante. On oriente le contour de sorte que  $i$  soit dirigé dans le sens de la normale. Donc  $d\vec{l} = r d\theta \vec{u}_\theta$ .

Le théorème d'Ampère s'énonce :

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = B(r, t) \times 2\pi r = \mu_0 i.$$

Ceci donne :

$$\vec{B}(M, t) = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \vec{u}_\theta.$$

On utilise les coordonnées cylindriques et la base associée  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ . Les fils sont dirigés suivant  $\vec{u}_z$  de sorte que le courant parcourant le fil 1 soit orienté dans le sens de  $\vec{u}_z$ .

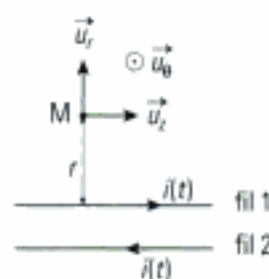
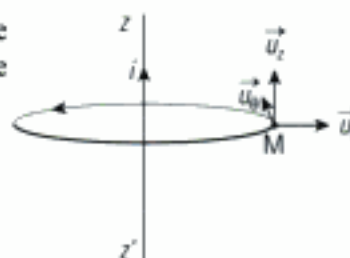
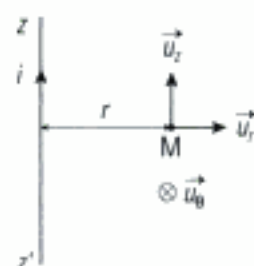
On en déduit le champ magnétique en un point  $M$  situé à la distance  $r$  du fil 1 et à la distance  $r' = r + (r_2 - r_1)$  du fil 2 :

$$\vec{B}(M, t) = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r'} \right) \vec{u}_\theta = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r + (r_2 - r_1)} \right) \vec{u}_\theta.$$

• On peut alors calculer le flux  $\Phi$  du champ magnétique à travers le cadre. Pour cela, on oriente la normale au cadre dans le sens de  $\vec{u}_\theta$  et donc le contour dans le sens MQPN.

On trouve alors  $\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$  où  $S$  représente la surface du cadre, soit :

$$\Phi = \iint_S B(r, t) dr dz = \int_{r_1}^{r_1+a} B(r, t) dr \int_0^b dz = \frac{\mu_0 i}{2\pi} b \int_{r_1}^{r_1+a} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r + (r_2 - r_1)} \right) dr.$$





$$\text{D'où } \Phi = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} b \left( \ln \frac{r_1 + a}{r_1} - \ln \frac{r_2 + a}{r_2} \right).$$

On a donc : 
$$\Phi = \frac{\mu_0 i}{2\pi} b \ln \left( \frac{r_2(r_1 + a)}{r_1(r_2 + a)} \right).$$

2) On met en œuvre la méthode n° 2.

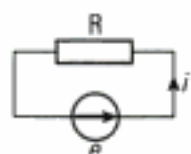
D'après la loi de Faraday, applicable dans le cas d'un contour fermé :  $\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt}$ .

On en déduit :

$$\varepsilon(t) = -\frac{\mu_0}{2\pi} b \ln \left( \frac{r_2(r_1 + a)}{r_1(r_2 + a)} \right) \frac{di(t)}{dt} = \frac{\mu_0 I_0 \omega}{2\pi} b \ln \left( \frac{r_2(r_1 + a)}{r_1(r_2 + a)} \right) \sin \omega t.$$

Dans ce cas,  $\varepsilon$  est orientée dans le sens du contour.

Pour déterminer le courant  $i'$  induit, on utilise la relation  $0 = Ri' - \varepsilon$  car le circuit est fermé.



 Voir Définition 3 § B.2.

Il reste donc : 
$$i'(t) = \frac{\varepsilon(t)}{R} = \frac{\mu_0 I_0 \omega}{2\pi R} b \ln \left( \frac{r_2(r_1 + a)}{r_1(r_2 + a)} \right) \sin \omega t.$$

## Exercice 2

1) On met en œuvre la méthode n° 2.

• On peut alors calculer le flux  $\Phi$  du champ magnétique  $\vec{B}$  à travers le cadre. D'après le sens de la normale, le cadre est orienté de C vers A.

Le flux à travers chaque spire du cadre est identique. Donc le flux à travers le cadre est égal à N fois le flux à travers une spire.

On a  $\Phi = N \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$  où S représente la surface du cadre et  $d\vec{S} = dS \vec{n} = dS(\cos\theta \vec{u}_x + \sin\theta \vec{u}_y)$ .

Soit :  $\Phi = NB_0 a^2 \sin\theta \cos\omega t.$

• D'après la loi de Faraday,  $\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt}$  lorsque la force électromotrice  $\varepsilon$  est orientée de C vers A.

On en déduit : 
$$\varepsilon(t) = NB_0 a^2 \omega \sin\theta \cos\omega t.$$

2) On met en œuvre la méthode n° 1.

On calcule le potentiel vecteur  $\vec{A}$  proposé, en un point  $M(x, y, z)$  quelconque dans la base cartésienne.

$$\vec{A} = \frac{\vec{B} \wedge \vec{OM}}{2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ B \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} zB \\ 0 \\ -xB \end{pmatrix}.$$

On vérifie qu'il est bien potentiel vecteur du champ magnétique  $\vec{B}$  :

$$\vec{\text{rot}} \vec{A} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \frac{zB}{2} \\ 0 \\ -\frac{xB}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{B}{2} + \frac{B}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{B}.$$

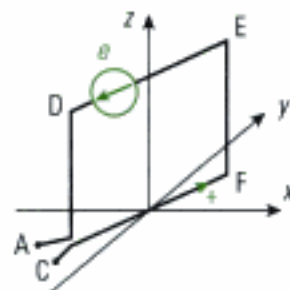
On retrouve bien  $\vec{\text{rot}} \vec{A} = \vec{B}$ .

3) Le champ électromoteur  $\vec{E}_m$  est défini par :

$$\vec{E}_m = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \begin{pmatrix} \frac{z}{2} \frac{\partial B}{\partial t} \\ 0 \\ \frac{x}{2} \frac{\partial B}{\partial t} \end{pmatrix}, \text{ dans la base cartésienne.}$$

On calcule la circulation de ce champ électromoteur entre les deux points C et A ( $d\vec{l}$  va de C vers A), et on obtient la force électromotrice d'induction  $e$  :

$$e(t) = \int_C^A \vec{E}_m \cdot d\vec{l} = \int_C^F \vec{E}_m \cdot d\vec{l} + \int_F^E \vec{E}_m \cdot d\vec{l} + \int_E^D \vec{E}_m \cdot d\vec{l} + \int_D^A \vec{E}_m \cdot d\vec{l}$$



Les points sommets du carré ont les coordonnées suivantes :

$$A = C\left(\frac{a \sin \theta}{2}; -\frac{a \cos \theta}{2}; 0\right); F\left(-\frac{a \sin \theta}{2}; \frac{a \cos \theta}{2}; 0\right); E\left(-\frac{a \sin \theta}{2}; \frac{a \cos \theta}{2}; a\right); D\left(\frac{a \sin \theta}{2}; -\frac{a \cos \theta}{2}; a\right).$$

Sur FE et DA,  $d\vec{l} = dz \vec{u}_z$  et donc  $\vec{E}_m \cdot d\vec{l} = \frac{x}{2} \frac{\partial B}{\partial t} dz$ .

$$\int_F^E \vec{E}_m \cdot d\vec{l} = \int_0^a \frac{-\frac{a \sin \theta}{2}}{2} \frac{\partial B}{\partial t} dz = -\frac{a^2 \sin \theta}{4} \frac{\partial B}{\partial t} = \frac{a^2 \sin \theta}{4} B_0 \omega \sin \omega t.$$

$$\int_D^A \vec{E}_m \cdot d\vec{l} = \int_a^0 \frac{\frac{a \sin \theta}{2}}{2} \frac{\partial B}{\partial t} dz = -\frac{a^2 \sin \theta}{4} \frac{\partial B}{\partial t} = \frac{a^2 \sin \theta}{4} B_0 \omega \sin \omega t.$$

Sur CF et ED,  $d\vec{l} = dx \vec{u}_x + dy \vec{u}_y$  et donc  $\vec{E}_m \cdot d\vec{l} = -\frac{z}{2} \frac{\partial B}{\partial t} dx$  soit :

$$\int_C^F \vec{E}_m \cdot d\vec{l} = \int_{\frac{-a \sin \theta}{2}}^{\frac{a \sin \theta}{2}} 0 dx = 0 \text{ car le segment [CF] est à une altitude } z = 0.$$

$$\int_E^D \vec{E}_m \cdot d\vec{l} = \int_{\frac{-a \sin \theta}{2}}^{\frac{a \sin \theta}{2}} -\frac{a}{2} \frac{\partial B}{\partial t} dx = \frac{a^2 \sin \theta}{2} B_0 \omega \sin \omega t.$$

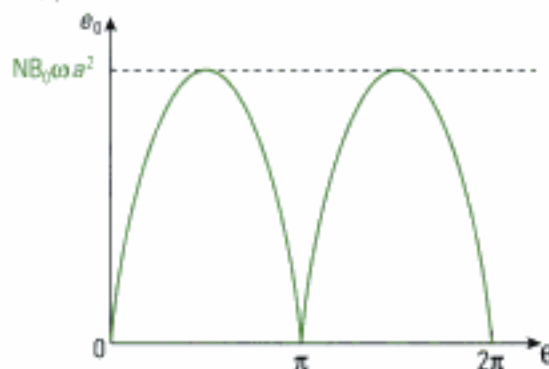
On obtient donc :  $e(t) = NB_0 a^2 \omega \sin \theta \sin \omega t$ .

4) L'amplitude de la force électromotrice est une grandeur toujours positive.

Donc :  $e(t) = NB_0 a^2 \omega |\sin \theta|$ .

La force électromotrice  $e$  est une fonction croissante de la fréquence du champ magnétique  $\vec{B}$  et varie en  $|\sin \theta|$ .

Le graphe de l'amplitude en fonction de  $\theta$  est le suivant :



5) Application numérique :  $e_0 = 942 \text{ mV}$ .

### Exercice 3

1) Le solénoïde est parcouru par un courant  $Ni$  sur une longueur  $d$ .

Si on suppose la densité de courant surfacique  $\vec{j}_s$  uniforme, on a  $Ni = j_s d$ .

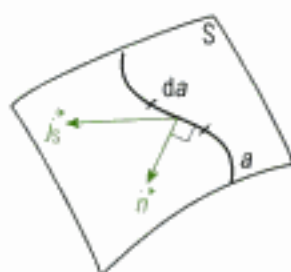


On peut se rappeler de la formule :  $dI = j_s da \vec{n}$  où  $dI$  est l'intensité traversant le segment  $da$  et  $\vec{n}$  étant la normale à ce segment.

Pour l'étude d'un solénoïde, on utilise les coordonnées cylindriques et la base associée  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ . L'axe du solénoïde est dirigé suivant  $\vec{u}_z$ , le courant est alors orienté dans le sens de  $\vec{u}_\theta$ .

Donc :

$$\vec{j}_s = \frac{Ni}{d} \vec{u}_\theta.$$



2) On peut utiliser les équations locales de l'électromagnétisme. On suppose que le solénoïde est infiniment long, c'est-à-dire que l'on néglige les effets de bord.

• On étudie les symétries et invariances du champ magnétique  $\vec{B}$  en un point M quelconque de l'espace.

Soit H le projeté orthogonal de M sur l'axe du cylindre. Le plan  $\pi_1$  (plan orthogonal à l'axe du cylindre) est plan de symétrie pour le solénoïde que l'on considère infiniment long, donc  $\vec{B}$  est orthogonal à ce plan.  $\vec{B}$  est dirigé selon le vecteur unitaire  $\vec{u}_z$  de la base cylindrique.

La distribution est invariante dans toute rotation autour de son axe, ainsi que dans toute translation selon son axe puisque le solénoïde est supposé de longueur infinie. On en déduit  $B = B(r, t)$ .

On en conclut, dans un système de coordonnées cylindriques, que  $\vec{B}(M, t) = B(r, t) \vec{u}_z$ .

Cette expression est vérifiée que M soit à l'intérieur ou à l'extérieur du solénoïde.

• D'après l'énoncé, le champ magnétique est nul à l'infini. Donc,  $\vec{B}(r \rightarrow +\infty) = \vec{0}$ .

• Enfin, on utilise l'équation de Maxwell-Ampère que l'on écrit dans les domaines  $r \leq a$  et  $r \geq a$  où le milieu est assimilable au vide.

On connaît le champ magnétique à l'infini, on commence donc par l'équation de Maxwell à l'extérieur du solénoïde.

➤ Pour  $r \geq a$ ,  $\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \rightarrow \vec{\text{rot}} \vec{B} = -\frac{\partial B}{\partial r} \vec{u}_\theta = \vec{0}$  puisqu'il n'y a pas de courant à l'extérieur du solénoïde.

Ceci donne :

$$B(r) = K \text{ où } K \text{ est une constante d'intégration.}$$

Or, le champ magnétique est nul à l'infini :  $B(r \rightarrow +\infty) = 0$  donc  $K = 0$ .

On en déduit alors l'expression du champ magnétique :

$$\vec{B}(r \geq a) = \vec{0}.$$

➤ Pour  $r \leq a$ ,  $\vec{\text{rot}} \vec{B} = \vec{0}$  de même, d'où :

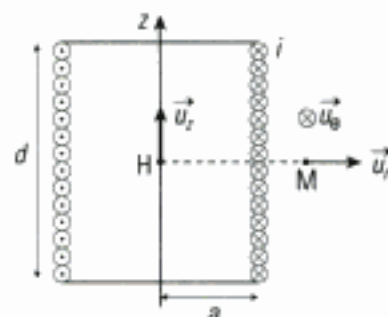
$$B(r) = K' \text{ où } K' \text{ est une constante d'intégration.}$$

Le champ magnétique est tangent au solénoïde en  $r = a$  et le solénoïde se comporte comme une distribution surfacique de courant donc le champ magnétique est discontinue en  $r = a$ .

On trouve alors  $\vec{B}(r = a^+) - \vec{B}(r = a^-) = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{u}_r$  où  $\vec{B}(r = a^+) = \vec{0}$  est le champ magnétique extérieur à la surface du solénoïde.

$$\text{Donc } \vec{B}(r = a^-) = \mu_0 j_s \vec{u}_z.$$

On a alors :  $K' = \mu_0 j_s$ .





Hidden page

- 4)  Dans cette question, il faut éviter de refaire tous les calculs mais simplement adapter les résultats précédents à la situation.

On calcule le flux. Le champ magnétique étant nul en dehors du solénoïde, son flux mutuel à travers la bobine est égal au flux à travers la section commune du solénoïde et de la bobine qui est le disque de rayon  $a$ .

$$\text{Donc } \Phi = Li'(t) + NB\pi a^2 = Li'(t) + \mu_0 \frac{N^2 i}{d} \pi a^2.$$

$$\text{Ceci donne : } 0 = Ri'(t) + L \frac{di'(t)}{dt} + \mu_0 \frac{N^2}{d} \pi a^2 \frac{di(t)}{dt}.$$

$$\text{On trouve donc : } I' = \frac{\mu_0 \frac{N^2}{d} \pi a^2 \omega I_0}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}}.$$

Ce courant reste identique quelque soit le rayon de la bobine plate  $b > a$ .

## Exercices de niveau 2

### Exercice 4

- 1) On détermine le champ magnétique  $\vec{B}$  dans tout l'espace en utilisant le théorème d'Ampère.



On va se placer ici dans l'ARQS : on va supposer que l'on travaille dans les basses fréquences. Dans ce cas, l'équation de Maxwell-Ampère est :  $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$  et le théorème d'Ampère s'écrit comme en première année :  $\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$ , où  $I$  est l'intensité traversant le contour  $\Gamma$ .

On utilise les coordonnées cylindriques et la base associée  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ . On oriente le fil suivant  $\vec{u}_z$  de sorte que le courant soit aussi orienté dans le sens de  $\vec{u}_z$ .

Soit un point M de l'espace situé à une distance  $r$  du fil, on étudie les symétries et invariances afin de trouver la direction du champ magnétique et les variables dont il dépend.

Le plan  $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$  est un plan de symétrie. Le champ magnétique  $\vec{B}$  est donc dirigé suivant  $\vec{u}_\theta$ . La distribution de courant est invariante par rotation d'angle  $\theta$  et par translation suivant  $\vec{u}_z$ . Le champ magnétique ne dépend donc que de la variable  $r$ .

$$\text{D'où : } \vec{B}(M, t) = B(r, t) \vec{u}_\theta.$$

On applique le théorème d'Ampère sur un contour circulaire  $\Gamma$  de rayon  $r$  placée à une cote  $z$  constante. On oriente le contour de sorte que  $i$  soit dirigé dans le sens de la normale. Donc  $d\vec{l} = r d\theta \vec{u}_\theta$ .

Le théorème d'Ampère s'énonce :

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = B(r, t) \times 2\pi r = \mu_0 i.$$

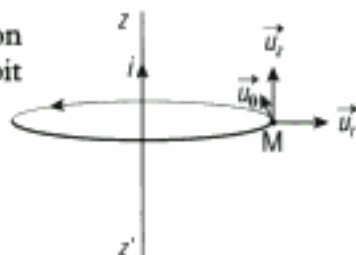
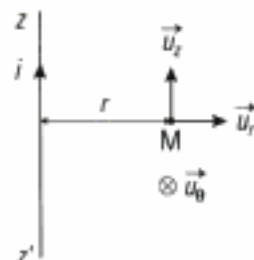
Ceci donne :

$$\vec{B}(M, t) = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \vec{u}_\theta.$$

### 2) 1<sup>re</sup> méthode :

On met en œuvre la méthode n° 1.

Le potentiel vecteur  $\vec{A}$  est solution de l'équation de Poisson vue au chapitre 2 :  $\Delta \vec{A} + \mu_0 \vec{j} = \vec{0}$  où  $\Delta$  est l'opérateur laplacien.



La solution est de la forme :  $\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{P \in \tau} \frac{\vec{j}(P)}{PM} dt$  pour une densité de courant volumique  $\vec{j}$ .

Pour un fil parcouru par un courant  $i(t)$ , on pourra écrire :

$$\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\text{fil}} \frac{i(t)}{PM} d\vec{l}(P),$$

où  $d\vec{l}(P)$  est un déplacement élémentaire autour du point P situé sur le fil.



Le vecteur déplacement élémentaire  $d\vec{l}(P)$  est dirigé suivant le vecteur  $\vec{u}_z$  qui ne dépend pas du point P, donc le potentiel vecteur  $\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left( \int_{\text{fil}} \frac{i(t)}{PM} dl(P) \right) \vec{u}_z$  est aussi dirigé suivant  $\vec{u}_z$ .

## 2<sup>e</sup> méthode :

Les plans  $z = \text{Cte}$  sont antisymétriques pour la distribution de courant. Par conséquent, comme le potentiel vecteur  $\vec{A}$  est un « vrai vecteur » (par opposition au champ magnétique  $\vec{B}$  qui est un « pseudo-vecteur », voir cours de 1<sup>re</sup> année), il est orthogonal à ces plans et il est ainsi dirigé suivant  $\vec{u}_z$ .

Le fil est infini donc invariant par translation suivant  $\vec{u}_z$  et aussi invariant par rotation d'angle  $\theta$  des coordonnées cylindriques.

On en déduit :  $\vec{A}(M) = A(r) \vec{u}_z$ .

3) Le calcul du potentiel vecteur  $\vec{A}$  est évident en considérant  $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$ .

$$\text{On a : } \vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi r} \vec{u}_\theta = \text{rot } \vec{A} = - \frac{\partial A(r)}{\partial r} \vec{u}_\theta.$$

On en déduit :  $A(r) = - \frac{\mu_0 i}{2\pi} \ln(r) + K$  où K est une constante d'intégration.

Le potentiel vecteur étant nul à la distance R de l'axe Oz, on a donc :  $K = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \ln(R)$ .

On trouve alors :  $\vec{A}(M) = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \ln\left(\frac{R}{r}\right) \vec{u}_z$ .

4) Par définition,  $\vec{E}_m(M) = - \frac{\partial \vec{A}(M)}{\partial t} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{r}{R}\right) \frac{di}{dt} \vec{u}_z$ .

5) a) Orientons tout d'abord le contour dans le sens ACDE. Par définition, on a :

$$\epsilon = N \oint_{ACDE} \vec{E}_m \cdot d\vec{l} = N \left( \int_A^C \vec{E}_m \cdot d\vec{l} + \int_C^D \vec{E}_m \cdot d\vec{l} + \int_D^E \vec{E}_m \cdot d\vec{l} + \int_E^A \vec{E}_m \cdot d\vec{l} \right),$$

car le cadre est constitué de N spires.

Sur les côtés AC et DE, le déplacement élémentaire  $d\vec{l}$  est dirigé selon  $\vec{u}_z$ , soit  $\vec{E}_m \cdot d\vec{l} = 0$ .

D'où :

$$\epsilon = N \left( \int_C^D \vec{E}_m \cdot d\vec{l} + \int_E^A \vec{E}_m \cdot d\vec{l} \right) = N \left[ \int_0^a \frac{\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{R+a}{R}\right) \frac{di}{dt} dz + \int_a^0 \frac{\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{R}{R}\right) \frac{di}{dt} dz \right]$$

puisque  $d\vec{l} = dz \vec{u}_z$  sur les cotés CD et EA.

$$\text{D'où : } \epsilon = \frac{\mu_0 N a}{2\pi} \ln\left(\frac{R+a}{R}\right) \frac{di}{dt}.$$



Le sens de  $\epsilon$  est donné par le sens de l'intégration. On trouve un résultat de signe opposé si on intègre dans l'autre sens.

b) On met en œuvre la méthode n° 2.

On calcule le flux du champ magnétique  $\vec{B}$  à travers le cadre :  $\Phi = N \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$ ,

où S représente la surface du cadre et  $d\vec{S} = -dr dz \vec{u}_\theta$  si on conserve l'orientation ACDE du cadre.



On a donc :  $\Phi = -N \int_0^a dz \int_R^{R+a} \frac{\mu_0 i}{2\pi r} dr = -\frac{\mu_0 N a i}{2\pi} \ln\left(\frac{R+a}{R}\right)$ .

On en déduit :  $\epsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\mu_0 N a}{2\pi} \ln\left(\frac{R+a}{R}\right) \frac{di}{dt}$ .

On retrouve bien le même résultat par les deux méthodes.

6) Par définition, le coefficient d'inductance mutuelle est tel que  $\Phi = Mi$ , où  $\Phi$  désigne le flux magnétique engendré par le fil infini à travers le cadre.

Donc  $M = \frac{\mu_0 N a}{2\pi} \ln\left(\frac{R+a}{R}\right)$ .



On a toujours  $M \geq 0$ . On remarque que le flux  $\Phi$  et l'intensité  $i$  dépendent d'une orientation.

## Exercice 5

1) On est dans le cas d'un transformateur parfait, donc  $u_2 = m u_1$  et  $i_1 = -m i_2$ .



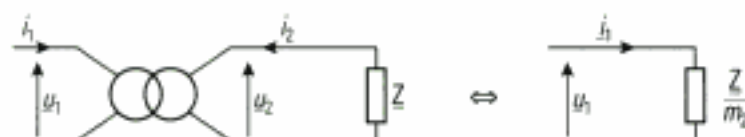
Pour retrouver ces formules, on peut se rappeler que la puissance électrique instantanée reçue par le transformateur parfait à l'entrée  $P_e = u_1 i_1$  est égale à la puissance instantanée fournie par le transformateur à la sortie  $P_s = -u_2 i_2$ .

On en déduit  $u_1 i_1 = -u_2 i_2$  soit  $i_1 = -\frac{u_2}{u_1} i_2$ .



On avait démontré dans le cours la relation  $i_1 = -m i_2$  uniquement lorsque  $u_2 = 0$ . Néanmoins, pour un transformateur parfait, ce résultat reste vérifié pour une tension au secondaire quelconque. On ne peut pas entrer dans les détails de cette explication qui est largement hors programme. Les élèves de la filière PSI peuvent trouver une ébauche d'explication dans la partie du programme de « conversion de puissance ».

2) L'impédance vue de l'entrée est par définition  $Z_e = \frac{u_1}{i_1}$  et on a  $\underline{Z} = -\frac{u_2}{i_2}$ .



Donc :  $Z_e = \frac{u_1}{-m i_2} = \frac{1}{m^2} \left( -\frac{u_2}{i_2} \right) = \frac{\underline{Z}}{m^2}$ .

3) L'objectif est ici de déterminer l'impédance équivalente au moteur.

Pour cela, il faut déterminer le rapport des valeurs efficaces de la tension et du courant à ses bornes puisque ce sont les deux données que l'on pourra déterminer.

La tension à ses bornes est égale à  $U_2 = m U_1 = 220$  V. Il s'agit ici de valeur efficace.

Le courant efficace  $I_2$  est obtenu grâce à l'expression de la puissance active moyenne absorbée par le moteur :  $P = U_2 I_2 \cos\varphi$ .

Donc :  $I_2 = \frac{P}{U_2 \cos\varphi} = 24,2$  A.

L'impédance est inductive donc le courant est en retard sur la tension :

si on note  $u_2(t) = U_2 \sqrt{2} \cos\omega t$ , alors  $i_2(t) = I_2 \sqrt{2} \cos(\omega t - \varphi)$ .

On a donc :  $\underline{Z} = -\frac{u_2}{i_2} e^{j\varphi} = \frac{U_2}{I_2} (\cos\varphi + j\sin\varphi)$ .

D'où :

$\underline{Z} = 8,55 + 3,10j$ .

⚠ On a choisi  $\varphi > 0$ , alors  $\sin\varphi = \sqrt{1 - \cos^2\varphi}$ .

On en déduit : 
$$Z_c = \frac{Z}{m^2} = 176,7 + 64,1j.$$

4) Le schéma électrique équivalent est :

La valeur efficace du courant dans le transformateur est donc

$$I_1 = \frac{U_1}{|Z_c|} = \frac{1000}{188} = 5,32 \text{ A.}$$

La puissance fournie par l'alimentation est la puissance fournie au transformateur  $P_t = \text{Re}(Z_c)I_1^2$  ainsi que la puissance dissipée par effet Joule dans la résistance de la ligne  $P_j = RI_1^2$ .

Donc : 
$$P = 5,03 \text{ kW.}$$

5) Le schéma électrique équivalent est :

La valeur efficace du courant dans le moteur est donc

$$I_2 = \frac{U_2}{|Z|} = \frac{220}{9,09} = 24,2 \text{ A.}$$

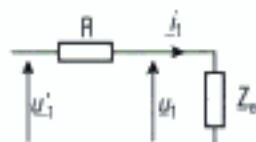
La puissance fournie par l'alimentation est la puissance fournie au moteur  $P_m = \text{Re}(Z)I_2^2$  ainsi que la puissance dissipée par effet Joule dans la résistance de la ligne  $P_j = RI_2^2$ .

Donc : 
$$P = 5,59 \text{ kW.}$$



On voit bien ici une des utilisations du transformateur qui sert d'adaptateur d'impédance afin de transmettre un maximum de puissance fournie par la source.

Une autre utilité du transformateur est l'« isolation galvanique » : la masse du circuit électrique du secondaire peut être différente de la masse du circuit au primaire.



## Exercice 6

1) Le disque est placé dans un champ magnétique variable et donc soumis à un phénomène d'induction engendrant un courant qui, du fait de la loi de Lenz, aura tendance par ses conséquences à s'opposer à ses causes.

Les conséquences de ce courant sont notamment l'apparition d'un champ magnétique  $\vec{B}'$  qui sera dirigé dans un sens opposé aux variations du champ  $B$ . Donc  $\vec{B}'$  est dirigé suivant  $\vec{u}_z$ . Ce champ est donc produit par des courants dirigés selon  $\vec{u}_\theta$  en coordonnées cylindriques.

Le champ magnétique et le disque sont invariant par rotation d'angle  $\theta$  des coordonnées cylindriques. Donc la densité de courant  $j$  est indépendant de  $\theta$ .

On en déduit : 
$$\vec{j} = j(r, z, t) \vec{u}_\theta.$$

2) D'après l'équation de Maxwell-Faraday, on a  $\text{rot } \vec{E}_m = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ .

$$\text{Donc } -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iint_S \text{rot } \vec{E}_m \cdot d\vec{S} = \oint_\Gamma \vec{E}_m \cdot d\vec{l},$$

où  $\Gamma$  est le cercle de rayon  $r$  et  $S$  la surface du disque de rayon  $r$ .

D'après la loi d'Ohm, on a  $\vec{j} = \gamma \vec{E}_m$ . D'où : 
$$\frac{2\pi r}{\gamma} j(r, z, t) = -\frac{d\Phi}{dt}(r, t).$$

Cette relation est vérifiée quelque soit la cote  $z$  du cercle.

Donc : 
$$\vec{j} = j(r, t) \vec{u}_\theta.$$

3) On a  $\oint_\Gamma \vec{E}_m \cdot d\vec{l} = \frac{j(r, t)}{\gamma} 2\pi r = -\frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \omega B_0 \pi r^2 \sin\omega t$ .

Soit : 
$$j(M, t) = \frac{\gamma \omega B_0 r}{2} \sin\omega t \vec{u}_\theta.$$

4) La puissance volumique dissipée par effet Joule est

$$\frac{dP}{dt} = \vec{j} \cdot \vec{E}_m = \frac{j^2}{\gamma} = \gamma \frac{(\omega B_0 r)^2}{4} (\sin \omega t)^2.$$

5) La puissance moyenne dissipée est :

$$P = \iiint_{\text{disque}} \langle \vec{j} \cdot \vec{E}_m \rangle dt = \int_0^a \gamma \frac{(\omega B_0 r)^2}{4} \frac{1}{2} r dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^e dz.$$

💡 On rappelle  $\langle \sin^2 \rangle = \frac{1}{2}$ .

On obtient :

$$P = \gamma \frac{(\omega B_0)^2}{16} \pi a^4 e.$$

## Exercice 7

1) Pour déterminer le champ magnétique  $\vec{B}$  dans le solénoïde, on utilise le théorème d'Ampère.

⚠ On va se placer ici dans l'ARQS : on va supposer que l'on travaille dans les basses fréquences. Dans ce cas, l'équation de Maxwell-Ampère est :  $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$  et le théorème d'Ampère s'écrit comme en première année :

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I, \text{ où } I \text{ est l'intensité traversant le contour } \Gamma.$$

• Le système possède une symétrie cylindrique, on utilise donc les coordonnées cylindriques et la base associée  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ .

Soit un point M de l'espace situé à une distance  $r$  du fil, on étudie les symétries et invariances afin de trouver la direction du champ magnétique et les variables dont il dépend.

Le plan  $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$  est un plan de symétrie. Le champ magnétique  $\vec{B}$  est donc dirigé suivant  $\vec{u}_\theta$ . La distribution de courant est invariante par rotation d'angle  $\theta$ . Donc le champ magnétique est indépendant de  $\theta$ .

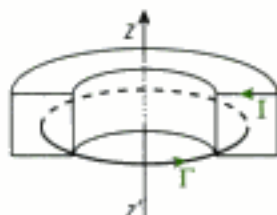
Donc :

$$\vec{B}(M) = B(r, z) \vec{u}_\theta.$$

• On applique le théorème d'Ampère sur un contour circulaire  $\Gamma$  de rayon  $r$  placé à une cote  $z$  constante de sorte que  $\Gamma$  soit inclus dans le solénoïde. On oriente le contour selon  $\vec{u}_\theta$  de sorte que  $d\vec{l} = r d\theta \vec{u}_\theta$ .

$$\text{On a donc } \oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = B(r, z) \times 2\pi r = -\mu_0 NI.$$

⚠ Le signe négatif est dû à l'orientation du contour  $\Gamma$ . La « normale »  $\vec{n}$  de ce contour a le sens contraire à l'intensité traversant  $\Gamma$ .



Ceci donne :  $\vec{B}(M) = -\frac{\mu_0 NI}{2\pi r} \vec{u}_\theta$  à l'intérieur du solénoïde.

• On applique le théorème d'Ampère sur un contour circulaire  $\Gamma$  de rayon  $r$  placé à une cote  $z$  constante de sorte que  $\Gamma$  soit à l'extérieur du solénoïde. On oriente le contour selon  $\vec{u}_\theta$  de sorte que  $d\vec{l} = r d\theta \vec{u}_\theta$ .

$$\text{On a donc } \oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = B(r, z) \times 2\pi r = 0.$$

Ceci donne :

$$\vec{B}(M) = \vec{0} \text{ à l'extérieur du solénoïde.}$$

2) Le flux du champ magnétique  $\vec{B}$  à travers le solénoïde est égal à :

$$\Phi = N \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = N \int_{R-\frac{a}{2}}^{R+\frac{a}{2}} -\frac{\mu_0 NI}{2\pi r} dr \int_0^a dz,$$

où S désigne une section carrée du tore.

$$\text{On obtient } \Phi = \frac{\mu_0 N^2 a I}{2\pi} \ln \frac{R + \frac{a}{2}}{R - \frac{a}{2}}.$$



3) L'inductance propre est le coefficient de proportionnalité entre  $\Phi$  et  $I$ .

 Ce coefficient est pris positif.

$$L = \frac{\mu_0 N^2 a}{2\pi} \ln \frac{R + \frac{a}{2}}{R - \frac{a}{2}}.$$

4) a) Le champ magnétique créé par le fil est de la forme  $\vec{B}'(M, r) = -\frac{\mu_0 I'}{2\pi r} \vec{u}_\theta$  (voir exercice 1) à une distance  $r$  du fil.

 Le signe négatif est dû à l'orientation du courant  $I'$ .

Le flux de ce champ magnétique  $\vec{B}'$  à travers le solénoïde est égal à :

$$\Phi' = N \iint_S \vec{B}' \cdot d\vec{S} = N \int_{R-\frac{a}{2}}^{R+\frac{a}{2}} -\frac{\mu_0 I'}{2\pi r} dr \int_0^a dz,$$

où  $S$  désigne une section carrée du tore.

On obtient

$$\Phi' = \frac{\mu_0 N a I'}{2\pi} \ln \frac{R - \frac{a}{2}}{R + \frac{a}{2}}.$$

b) L'inductance mutuelle est le coefficient de proportionnalité entre  $\Phi'$  et  $I'$ .

 Ce coefficient est pris positif.

$$M = \frac{\mu_0 N a}{2\pi} \ln \frac{R + \frac{a}{2}}{R - \frac{a}{2}}.$$

5) a) On met en œuvre les méthodes n° 2 et 3.

Le flux total à travers le solénoïde  $\Phi_i$  est constitué du flux propre et du flux de mutuelle induction :  $\Phi_i = -Li - MI'$ .

 Les signes négatifs sont dus aux conventions d'orientation des intensités.

On en déduit l'expression de la f.e.m induite :  $e = -\frac{d\Phi_i}{dt} = L \frac{di}{dt} + M \frac{dI'}{dt}$ .

 On rappelle la notation f.e.m. pour force électromotrice.

L'équation électrique du solénoïde est alors :

$$0 = R'i - e = R'i + L \frac{di}{dt} + M \frac{dI'}{dt}.$$

Pour résoudre cette équation, on passe en notation complexe :

$$(R' + jL\omega)\hat{i} = -j\omega MI_0 e^{j\omega t}.$$

On obtient alors :  $\hat{i} = -j\omega \frac{MI_0}{R' + jL\omega} e^{j\omega t} = -j \frac{MI_0\omega}{\sqrt{R'^2 + (L\omega)^2}} e^{j(\omega t - \arctan(\frac{L\omega}{R'}) )}.$

Ceci donne :  $i(t) = \frac{MI_0\omega}{\sqrt{R'^2 + (L\omega)^2}} \sin\left(\omega t - \arctan\left(\frac{L\omega}{R'}\right)\right).$

 On rappelle  $\text{Re}(-je^{j\omega t}) = \sin\omega t$ .

b) On a  $L = \frac{\mu_0 N^2 a}{2\pi} \ln \frac{R + \frac{a}{2}}{R - \frac{a}{2}} = 1,6 \text{ mH}$  et  $M = \frac{L}{N} = 0,16 \text{ }\mu\text{H}$ .

Donc :  $i(t) = \frac{MI_0\omega}{\sqrt{R'^2 + (L\omega)^2}} \sin\left(\omega t - \arctan\left(\frac{L\omega}{R'}\right)\right) = 0,45 \sin(\omega t - 0,5).$

c) Si  $L\omega \gg R$ ,  $i(t) \approx \frac{MI_0}{L} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{MI_0}{L} \cos\omega t$ .

Le courant dans le solénoïde est en opposition de phase par rapport à celui dans le fil infini. On retrouve ici la loi de Lenz : le courant induit  $i(t)$  crée un champ magnétique  $\vec{B}$  dans le tore qui s'oppose au champ magnétique  $\vec{B}'$  appliqué par le fil infini.

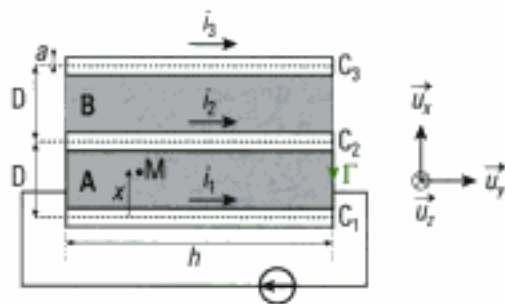
## Exercices de niveau 3

### Exercice 8

1) On place un repère cartésien sur la figure.

Le plan défini par l'axe du conducteur  $C_2$  et les vecteurs  $\vec{u}_y$  et  $\vec{u}_z$  est un plan de symétrie du système.

Les courants dans les conducteurs  $C_1$  et  $C_3$  sont donc identiques :  $i_1 = i_3$ .



2) Le champ magnétique créé par un conducteur est obtenu grâce au théorème d'Ampère.

On trouve  $\vec{B}_1(M) = -\frac{\mu_0 i_1}{2\pi x} \vec{u}_z$  pour le champ magnétique créé par le conducteur  $C_1$  en M (voir l'exercice 1 pour la démonstration).

De même,  $\vec{B}_2(M) = \frac{\mu_0 i_2}{2\pi(D-x)} \vec{u}_z$  pour le champ magnétique créé par le conducteur  $C_2$  en M et

$\vec{B}_3(M) = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi(2D-x)} \vec{u}_z$  pour le champ magnétique créé par le conducteur  $C_3$  en M.

D'où :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{2\pi} \left( \frac{i_2}{(D-x)} + \frac{i_1}{(2D-x)} - \frac{i_1}{x} \right) \vec{u}_z.$$

3) Le flux de ce champ magnétique à travers la surface S de A est égal à  $\Phi = N \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$ . On oriente la surface, par exemple, de sorte que la normale soit  $\vec{u}_z$  (le courant  $i_1$  est alors orienté dans le sens inverse du contour  $\Gamma$  et  $i_2$  est orienté dans le sens du contour  $\Gamma$ ).

Donc  $\Phi = \frac{\mu_0}{2\pi} \int_a^{D-a} \left( \frac{i_2}{(D-x)} + \frac{i_1}{(2D-x)} - \frac{i_1}{x} \right) dx \int_0^h dy$ .

Soit :

$$\Phi = \frac{\mu_0 h}{2\pi} \left[ -i_2 \ln\left(\frac{a}{D-a}\right) - i_1 \ln\left(\frac{D+a}{2D-a}\right) - i_1 \ln\left(\frac{D-a}{a}\right) \right].$$

Avec l'approximation  $a \ll D \ll h$ , on obtient  $\Phi = \frac{\mu_0 h}{2\pi} \left[ (i_1 - i_2) \ln\left(\frac{a}{D}\right) + i_1 \ln 2 \right]$ .

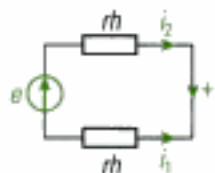
4) On met en œuvre la méthode n° 2.

La force électromotrice induite  $e$  dans le circuit fermé  $\Gamma$  défini dans l'énoncé est donnée par la loi de Faraday :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\mu_0 h}{2\pi} \left[ \left( \frac{di_2}{dt} - \frac{di_1}{dt} \right) \ln\left(\frac{a}{D}\right) - \frac{di_1}{dt} \ln 2 \right] \quad (1).$$

5) On met en œuvre la méthode n° 3.

On considère le circuit fermé  $\Gamma$  comportant les deux conducteurs  $C_1$  (parcouru par le courant  $i_1$ ) et  $C_2$  (parcouru par le courant  $i_2$ ), l'équation électrique dans ce circuit donne :  $0 = rhi_2 - rhi_1 - e$  où  $rh$  représente la résistance équivalente de chaque conducteur.



On en déduit la relation :  $i_2 - i_1 = \frac{e}{rh} \quad (2).$

En notation complexe, les équations (1) et (2) donnent :

$$\varepsilon = j\omega \frac{\mu_0 h}{2\pi} \left[ (i_2 - i_1) \ln\left(\frac{a}{D}\right) - i_1 \ln 2 \right] \quad \text{et} \quad i_2 - i_1 = \frac{\varepsilon}{rh}.$$

On trouve alors :  $\frac{i_2}{i_1} = 1 - \frac{\ln 2}{\frac{2\pi r}{j\mu_0 \omega} + \ln\left(\frac{D}{a}\right)}.$

On a donc :  $f(\omega) = \frac{2\pi r}{j\mu_0 \omega} + \ln\left(\frac{D}{a}\right).$

6) En courant continu,  $\omega = 0$ , on trouve  $\frac{i_2}{i_1} = 1.$

En très haute fréquence,  $\omega \rightarrow +\infty$ , on obtient  $\frac{i_2}{i_1} = 1 - \frac{\ln 2}{\ln\left(\frac{D}{a}\right)} < 1.$

Les courants sont toujours en phases. Cependant, le courant dans le conducteur du milieu devient inférieur aux courants dans les conducteurs extérieurs lorsque la fréquence augmente. Ce phénomène ressemble au phénomène d'effet de peau que l'on a rencontré dans le chapitre précédent. Il est dû à l'induction dans les conducteurs.

## Exercice 9

1) a) On met en œuvre la méthode n° 1.

On utilise les coordonnées cylindriques et la base associée  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z).$

• Le solénoïde est infini donc invariant par translation suivant  $\vec{u}_z$  et par rotation d'angle  $\theta$  des coordonnées cylindriques. Le potentiel vecteur  $\vec{A}$  ne dépend donc que de la variable  $r$ .

• En un point M quelconque de l'espace, le plan  $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$  est antisymétrique pour la distribution de courant. Par conséquent, le potentiel vecteur  $\vec{A}$  étant un « vrai vecteur », il est orthogonal à ce plan et il est donc dirigé suivant  $\vec{u}_z$ .

On en déduit :  $\vec{A}(M) = A(r)\vec{u}_z.$

• Le calcul du potentiel vecteur  $\vec{A}$  est évident en considérant  $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}.$

➤ À l'intérieur du solénoïde, on a :  $\vec{B} = \mu_0 ni(t)\vec{u}_z = \text{rot } \vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial[rA(r)]}{\partial r} \vec{u}_z.$

On en déduit :

$$rA(r) = \mu_0 ni(t) \frac{r^2}{2} + K \quad \text{où } K \text{ est une constante d'intégration.}$$

$\vec{A}(r=0) = \vec{0}$  car  $\vec{A}(r=0)$  doit être orthogonal à tous les plans contenant l'axe  $(Ox)$ . On a alors :  $K = 0.$

On trouve alors :  $\vec{A}(r \leq a) = \mu_0 ni(t) \frac{r}{2} \vec{u}_z.$

➤ À l'extérieur du solénoïde, on a :  $\vec{B} = \vec{0} = \text{rot } \vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial[rA(r)]}{\partial r} \vec{u}_z.$

On en déduit :

$$rA(r) = K' \quad \text{où } K' \text{ est une constante d'intégration.}$$

Il y a continuité du potentiel vecteur à la traversée du plan  $r = a$ , donc  $A(a) = \mu_0 ni(t) \frac{a}{2}$  donne  $aA(a) = \mu_0 ni(t) \frac{a^2}{2} = K'.$





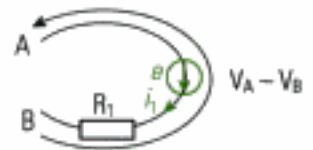
On peut rappeler que les deux potentiels, scalaire  $V$  et vecteur  $\vec{A}$ , sont définis et continus en tout point de l'espace, à la différence du champ électromagnétique ( $\vec{E}$ ;  $\vec{B}$ ) qui peut être discontinu, notamment lors de la traversée de surfaces chargées ou connaissant un courant surfacique.

On trouve alors :

$$\vec{A}(r \geq a) = \mu_0 n i(t) \frac{a^2}{2r} \vec{u}_\theta.$$

b) Par définition,

$$\vec{E}_m = - \frac{\partial \vec{A}(M)}{\partial t} = - \mu_0 n \frac{a^2}{2R} \frac{di}{dt} \vec{u}_\theta.$$



c) D'après l'équation électrique, on a  $V_A - V_B = R_1 i_1 - \epsilon$  (1) où  $i_1 = 0$  car le circuit est ouvert et  $\epsilon$  est la f.e.m induite dans la portion ( $S_1$ ).

Par définition,  $\epsilon = \int_A^B \vec{E}_m \cdot d\vec{l}$  où  $d\vec{l} = -R d\theta \vec{u}_\theta$  puisque l'on se déplace de A vers B.

$$\text{D'où : } \epsilon = \int_0^{2\pi-\theta} \mu_0 n \frac{a^2}{2} \frac{di}{dt} d\theta = \mu_0 n \frac{a^2}{2} (2\pi - \theta) \frac{di}{dt}.$$

On trouve alors :

$$V_A - V_B = -\epsilon = -\mu_0 n \frac{a^2}{2} (2\pi - \theta) \frac{di}{dt}.$$

2) On se trouve dans la situation suivante :

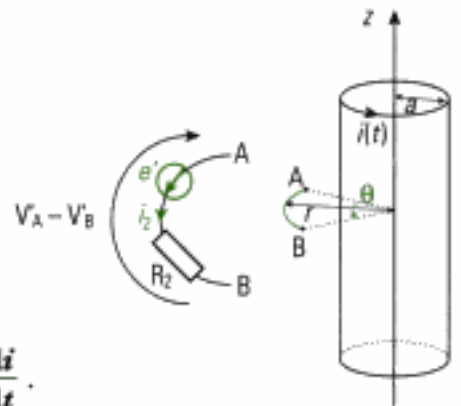
D'après l'équation électrique, on a  $V'_A - V'_B = R_2 i_2 - \epsilon'$  (2) où  $i_2 = 0$  car le circuit est ouvert et  $\epsilon'$  est la f.e.m induite dans la portion ( $S_2$ ).

Par définition,  $\epsilon' = \int_A^B \vec{E}_m \cdot d\vec{l}$  où  $d\vec{l} = -R d\theta \vec{u}_\theta$  où puisque l'on se déplace de A vers B.

$$\text{D'où : } \epsilon' = - \int_0^\theta \mu_0 n \frac{a^2}{2} \frac{di}{dt} d\theta = -\mu_0 n \frac{a^2}{2} \theta \frac{di}{dt}.$$

On trouve alors :

$$V'_A - V'_B = -\epsilon' = \mu_0 n \frac{a^2}{2} \theta \frac{di}{dt}.$$



3) Lorsque l'on connecte les deux spires, on a  $V'_A - V'_B = V_A - V_B$ .

Par convention, on oriente le courant  $i_2$  de A vers B dans la portion ( $S_2$ ) et le courant  $i_1$  est orienté de A vers B dans la portion ( $S_1$ ).

On a donc :  $i_2 = -i_1$  puisque les spires sont en série.

D'après les équations (1) et (2), on obtient :  $-R_2 i_1 - \epsilon' = R_1 i_1 - \epsilon$

$$\text{soit } i_1 = \frac{\epsilon - \epsilon'}{R_1 + R_2}.$$

On trouve donc :

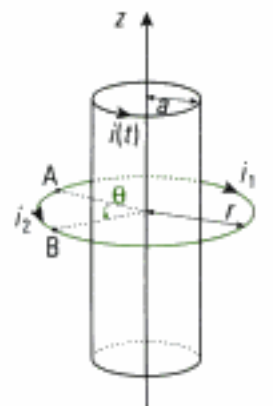
$$i_1(t) = \frac{\mu_0 n a^2 \pi}{R_1 + R_2} \frac{di(t)}{dt}.$$

**Le courant  $i_1(t)$  défini ci-dessus est orienté dans le sens horaire.**

4) a) On met en œuvre la méthode n° 2.

La spire est toujours orientée dans le sens horaire. D'après la loi de Faraday, on a  $\epsilon_s = -\frac{d\Phi}{dt}$  où  $\epsilon_s$  représente la f.e.m induite dans la spire fermée et  $\Phi$  est le flux du champ magnétique à travers la surface  $S$  de la spire :

$$\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \text{ où } d\vec{S} = -r dr d\theta \vec{u}_z \text{ si on oriente le contour dans le sens horaire.}$$



On trouve :  $\Phi = -\mu_0 n a^2 \pi i$  donc :

$$e_s = \mu_0 n a^2 \pi \frac{di}{dt}.$$

b) On met en œuvre la méthode n° 3.

D'après l'équation électrique sur le circuit fermée de résistance  $R_1 + R_2$ ,

on a :

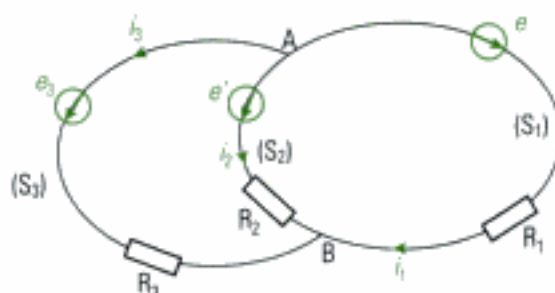
$$0 = (R_1 + R_2)i_1 - e_s.$$

On obtient alors :

$$i_1(t) = \frac{\mu_0 n a^2 \pi}{R_1 + R_2} \frac{di(t)}{dt}.$$

On retrouve donc le même résultat.

5) On calcule le flux  $\Phi_{23}$  du champ magnétique à l'intérieur de la surface délimitée par les portions de spire  $(S_2)$  et  $(S_3)$ .



Le champ magnétique  $\vec{B}$  est nul à l'intérieur de cette surface car il est nul à l'extérieur du solénoïde, donc son flux  $\Phi_{23}$  est nul.

On a donc :

$$e' - e_3 = -\frac{d\Phi_{23}}{dt} = 0.$$

Les f.e.m dans chaque portion sont donc égales :

$e_3 = e'$  où  $e_3$  représente la f.e.m dans la portion  $(S_3)$ .

La différence de potentiel aux bornes de chaque portion est identique puisqu'elles sont connectées en parallèle :  $R_2 i_2 - e' = R_1 i_1 - e = R_3 i_3 - e'$  où  $i_3$  est orienté dans le sens trigonométrique.

De plus, l'application de la loi des nœuds au point A donne  $i_1 + i_2 + i_3 = 0$ .

On obtient alors trois équations à trois inconnues :

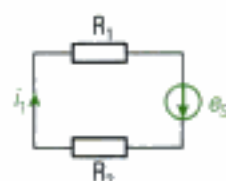
$$\begin{cases} R_3 i_3 - e' = R_1 i_1 - e \\ R_3 i_3 = R_2 i_2 \\ i_1 + i_2 + i_3 = 0. \end{cases}$$

On résout par substitution :

$$\begin{cases} R_3 i_3 - e' = -R_1 (i_2 + i_3) - e \\ R_3 i_3 = R_2 i_2 \end{cases} \quad \text{soit} \quad R_3 i_3 - e' = -R_1 \left( \frac{R_3}{R_2} i_3 + i_3 \right) - e.$$

On obtient :

$$i_3 = \frac{e' - e}{R_3 + R_1 \left( \frac{R_3}{R_2} + 1 \right)} = \frac{-\mu_0 n a^2 \pi \frac{di}{dt}}{R_3 + R_1 \left( \frac{R_3}{R_2} + 1 \right)}.$$



## Exercice 10

1) a) On utilise les coordonnées cylindriques et la base associée  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ .

• Le solénoïde est considéré infini donc invariant par translation suivant  $\vec{u}_z$  et par rotation d'angle  $\theta$  des coordonnées cylindriques. Le champ électrique  $\vec{E}_m$  ne dépend donc que de la variable  $r$ .



On appelle  $\vec{E}_m$  le champ électrique parce que celui-ci résulte de l'induction.

• En un point M quelconque de l'espace, le plan  $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$  est antisymétrique pour la distribution de courant. Par conséquent, le champ électrique  $\vec{E}_m$  étant un « vrai vecteur », il est orthogonal à ce plan et il est donc dirigé suivant  $\vec{u}_z$ .

On en déduit :

$$\vec{E}_m(M) = E_m(r) \vec{u}_z.$$

b) Une ligne de champ électrique est une courbe tangente en tout point au champ électrique. Il s'agit ici d'un cercle.

• Si  $r \leq a$ , alors  $\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$  où S est la surface du disque de rayon  $r$ .

Le champ magnétique est uniforme dans le solénoïde donc :

$$\Phi = \mu_0 n \pi r^2 I(t) = \mu_0 n \pi r^2 I_0 \cos \omega t.$$

• Si  $r \geq a$ , le champ magnétique est nul en dehors du solénoïde.

On obtient alors :

$$\Phi = \mu_0 n \pi a^2 I(t) = \mu_0 n \pi a^2 I_0 \cos \omega t.$$

c) D'après la loi de Faraday,  $\oint_\Gamma \vec{E}_m \cdot d\vec{l} = - \frac{d\Phi}{dt}$  où  $\Gamma$  représente le cercle de rayon  $r$ .

Or,  $\vec{E}_m(M) = E_m(r) \vec{u}_z$  et  $d\vec{l} = r d\theta \vec{u}_\theta$  si on oriente le contour dans le sens trigonométrique.

On a donc :

$$E_m(r) 2\pi r = - \frac{d\Phi}{dt}.$$

On en déduit :

$$\vec{E}_m(r \leq a) = \mu_0 n \frac{r}{2} I_0 \omega \sin \omega t \vec{u}_z \quad \text{et} \quad \vec{E}_m(r > a) = \mu_0 n \frac{a^2}{2r} I_0 \omega \sin \omega t \vec{u}_z.$$

2) La puissance moyenne dissipée par effet Joule est :

$$\langle P_J \rangle = \iiint_{\text{cylindre}} \langle \vec{j} \cdot \vec{E}_m \rangle d\tau = \int_0^b \sigma \langle E_m(r \leq a) \rangle^2 r dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^L dz.$$

On obtient :

$$\langle P_J \rangle = \sigma (\mu_0 n I_0 \omega)^2 \frac{\pi b^4 L}{16}.$$



On rappelle  $\langle \sin^2 \rangle = \frac{1}{2}$ .

A.N. :

$$\langle P_J \rangle = 9,3 \cdot 10^{-4} \omega^2.$$

3) a) Le champ magnétique créé sur l'axe Oz est de la forme  $d\vec{B}' = \mu_0 dI' \vec{u}_z$  où  $dI'$  représente le courant qui traverse le cylindre creux (schématisé par une seule spire de longueur L).

Soit :  $dI' = \iint_{S_C} \vec{j} \cdot d\vec{S} = j \times L dr = \sigma \mu_0 n L I_0 \omega \sin \omega t \frac{r}{2} dr$ ,

où  $S_C$  représente une section de la surface cylindrique d'épaisseur  $dr$  et  $\vec{j} = \sigma \vec{E}_m$ .



D'où :

$$d\vec{B}' = \mu_0 \frac{dI'}{L} \vec{u}_z = \sigma \mu_0^2 n I_0 \omega \sin \omega t \frac{r}{2} dr \vec{u}_z.$$

b) Pour trouver le champ magnétique total, il faut sommer les champ magnétiques  $d\vec{B}'$  engendrés par chaque cylindre creux de rayon  $r$  variant de 0 à  $b$  :

$$\vec{B}' = \int_0^b d\vec{B}'.$$

Donc :

$$\vec{B}' = \sigma \mu_0^2 n I_0 \omega \sin \omega t \frac{b^2}{4} \vec{u}_z = \mu_0 n I_0 \sin \omega t \frac{b^2}{2\delta^2} \vec{u}_z.$$

avec  $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \sigma \omega}}$ .

c) On a, en notation complexe :

$$\vec{B} = \mu_0 n I_0 e^{j\omega t} \vec{u}_z \quad \text{et} \quad \vec{B}' = \mu_0 n I_0 \frac{b^2}{2\delta^2} e^{j(\omega t - \frac{\pi}{2})} \vec{u}_z.$$

On détermine alors :

$$\frac{\|\vec{B}'\|}{\|\vec{B}\|} = \frac{b^2}{2\delta^2}.$$

On en déduit que l'amplitude de  $\vec{B}'$  est négligeable devant l'amplitude de  $\vec{B}$  si  $b \ll \delta$ .

Si le cylindre possède une épaisseur non négligeable devant  $\delta$ , on peut supposer que le champ magnétique  $\vec{B}'$  à l'intérieur du conducteur, à une certaine profondeur, compense le champ magnétique extérieur  $\vec{B}$ . Ceci explique l'absence de champ électromoteur  $\vec{E}_m$  et donc de courant induit à partir d'une certaine profondeur dans le cylindre. Il s'agit là de l'effet de peau étudié au chapitre 2.



# Induction électromagnétique dans un circuit mobile

## Introduction

On étudie dans ce chapitre le cas où les circuits sont plongés dans un champ magnétique indépendant du temps. Les circuits peuvent être fixes et déformables, ou indéformables et mobiles.

L'induction est produite par le mouvement du circuit. On remarquera que la loi de Faraday peut encore être appliquée lorsque l'on a affaire à un circuit fermé, c'est-à-dire lorsque le calcul du flux magnétique à travers le circuit est possible.

Le traitement d'un problème d'induction passe donc par le choix de la méthode la plus judicieuse.

Le chapitre termine sur l'application du haut parleur électrodynamique dans lequel le phénomène d'induction permet la conversion de l'énergie électrique en énergie mécanique.

## Plan du chapitre 4

A. Changement de référentiel .....	164
B. Champ électromoteur induit par un déplacement .....	164
C. Force électromotrice induite .....	165
D. Courants de Foucault .....	165
E. Application : le haut parleur électrodynamique	
1. Description .....	166
2. Mise en équations .....	166
3. Solutions .....	167
4. Bilan énergétique .....	168
Méthodes	
L'essentiel ; mise en œuvre .....	170
Énoncés des exercices .....	174
Indications .....	179
Solutions des exercices .....	180



## A. Changement de référentiel

1. Cela signifie simplement :  $v_e \ll c$ .

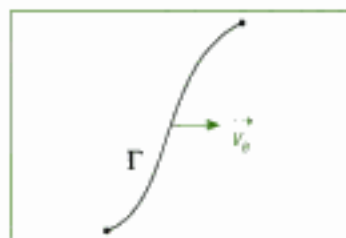


Fig. 1 - Élément de conducteur  $\Gamma$ .

2. Le conducteur est fixe dans son référentiel.

3.  $\vec{v}$  est la vitesse absolue,  $\vec{v}'$  la vitesse relative et  $\vec{v}_e$  la vitesse d'entraînement.

4. On parle de transformation galiléenne des champs.

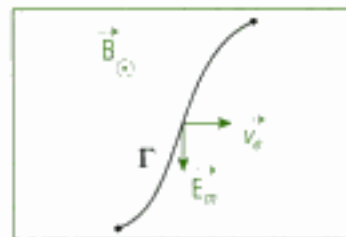


Fig. 2 - Élément  $\Gamma$  dans un champ magnétique  $\vec{B}$  stationnaire.

5. conformément au libellé du programme officiel.

6. Comme le champ magnétique  $\vec{B}$  est inchangé dans un changement de référentiel, il reste indépendant du temps et uniforme dans chaque référentiel.

7.  $\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{0}$  car  $\vec{A}$  est aussi permanent.

Considérons un circuit source  $S$  (créateur de champ) indéformable et fixe dans un référentiel Galiléen  $R$  auquel est attaché le repère  $Oxyz$  cartésien. Soit un élément de conducteur  $\Gamma$  centré en un point  $M$  et se déplaçant avec la vitesse  $\vec{v}_e$ , supposée non relativiste<sup>1</sup>, dans  $R$ . Soit  $R'$  le référentiel attaché à cet élément de conducteur et  $O'x'y'z'$  le repère correspondant (fig. 1).

On note  $(\vec{E}, \vec{B})$  le champ électromagnétique créé au point  $M$  par les sources  $S$ , et évalué dans le référentiel  $R$  lié aux sources : ce champ est solution des équations de Maxwell locales telles qu'elles ont été écrites au chapitre 2.

Soit  $(\vec{E}', \vec{B}')$  le champ électromagnétique créé au point  $M$  par les sources  $S$ , mais évalué dans le référentiel  $R'$  lié à l'élément de conducteur<sup>2</sup>.

**Pour exprimer le champ électromagnétique  $(\vec{E}', \vec{B}')$  en fonction du champ électromagnétique  $(\vec{E}, \vec{B})$ , on admet que les lois physiques restent les mêmes dans tous les référentiels.**

En l'occurrence, on écrit l'invariance de la force de Lorentz subie par un électron possédant la vitesse  $\vec{v}$  dans  $R$  et  $\vec{v}'$  dans  $R'$  :

$$-e(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) = -e(\vec{E}' + \vec{v}' \wedge \vec{B}').$$

D'autre part, on écrit la composition des vitesses (non relativistes) :

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_e.$$

On substitue cette expression dans l'équation précédente :

$$\vec{E} + \vec{v}_e \wedge \vec{B} + \vec{v}' \wedge \vec{B} = \vec{E}' + \vec{v}' \wedge \vec{B}.$$

Cette équation étant toujours vérifiée, on l'écrit dans le cas particulier où  $\vec{v}' = \vec{0}$ , on obtient alors :

$$\vec{E}' = \vec{E} + \vec{v}_e \wedge \vec{B}.$$

Compte tenu de ce résultat, il vient, en reprenant l'équation générale :

$$\vec{v}' \wedge \vec{B} = \vec{v}' \wedge \vec{B}', \text{ soit } \vec{v}' \wedge (\vec{B} - \vec{B}') = \vec{0}.$$

Cette dernière équation est valable pour tout vecteur vitesse  $\vec{v}'$ , par exemple colinéaire aux vecteurs de base de l'un des repères : le vecteur  $\vec{B} - \vec{B}'$  doit donc être colinéaire à chacun des vecteurs de base du repère, condition qui ne peut être vérifiée que s'il est nul.

### Propriété 1

Les formules de changement de référentiel pour le champ électromagnétique (valables pour des transformations non relativistes) sont<sup>4</sup> :

$$\vec{E}' = \vec{E} + \vec{v}_e \wedge \vec{B} \quad \text{et} \quad \vec{B}' = \vec{B}.$$

## B. Champ électromoteur induit par un déplacement

Nous supposons<sup>5</sup> que le champ magnétique est uniforme et indépendant du temps<sup>6</sup>. Dans le référentiel  $R'$  du conducteur, le champ électrique s'écrit :  $\vec{E}' = \vec{E} + \vec{v}_e \wedge \vec{B}$  (fig. 2), et dans  $R$  :

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \text{grad}V = -\text{grad}V'.$$

On peut donc écrire :  $\vec{E}' = -\text{grad}V + \vec{v}_e \wedge \vec{B}$ .

1. On parle de champ électromoteur « de Lorentz » pour préciser qu'il s'agit d'un circuit mobile dans un champ stationnaire.

2. L'expression la plus générale du champ électrique  $\vec{E}$  dans un repère mobile avec un champ magnétique  $\vec{B}(\vec{r})$  dépendant du temps est :

$$\vec{E} = -\vec{\text{grad}}V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{v}_e \wedge \vec{B}.$$

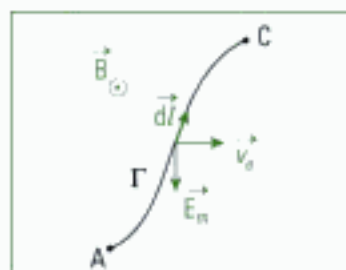


Fig. 3 - Élément  $\Gamma$  dans un champ magnétique  $\vec{B}$  stationnaire.

3. Il s'agit d'une portion de conducteur filiforme, indéformable et fixe dans son propre référentiel, mais mobile dans le référentiel des sources.

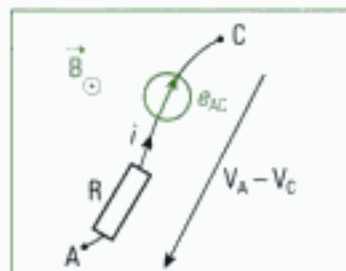


Fig. 4 - Schéma électrique équivalent.

4. Léon Jean Bernard Foucault (1819-1868) était un physicien français. Il mit en évidence les courants de même nom, mais a aussi inventé le gyroscope en 1852 et mis en évidence les forces de Coriolis avec le pendule qui porte son nom. Il a aussi mesuré la vitesse de la lumière.

5. La densité de courant volumique  $\vec{j}$  ne s'écrit de cette manière que lorsque le conducteur est fixe dans  $R'$ .

6. Ce résultat est conforme à la loi de Lenz : les forces qui s'appliquent s'opposent à la cause de l'induction, qui est ici le mouvement du conducteur.

On peut donc considérer que le potentiel scalaire  $V$  du champ  $\vec{E}$  est aussi un potentiel scalaire du champ  $\vec{E}'$ , et que le champ  $\vec{E}'$  contient un terme qui n'est pas *a priori* à circulation conservative. Ce terme sera appelé champ électromoteur, de sorte que l'on peut écrire :

#### Définition 1

Le champ électromoteur d'induction  $\vec{E}_m$  dans un circuit mobile de vitesse  $\vec{v}$ , dans un référentiel galiléen  $R$  s'écrit :

$$\vec{E}_m = \vec{v}_e \wedge \vec{B},$$

et le champ électrique  $\vec{E}'$  dans le référentiel  $R'$  du conducteur  $\Gamma$  s'écrit :

$$\vec{E}' = -\vec{\text{grad}}V + \vec{E}_m.$$

## C. Force électromotrice induite

Soient A et C les extrémités de la portion de conducteur<sup>3</sup> considérée (fig. 3). Calculons la circulation du champ électrique  $\vec{E}'$  entre ces deux points :

$$\int_A^C \vec{E}' \cdot d\vec{l} = \int_A^C -\vec{\text{grad}}V \cdot d\vec{l} + \int_A^C \vec{E}_m \cdot d\vec{l} = V_A - V_C + e_{AC}.$$

On a vu au chapitre précédent la relation :

$$\int_A^C \vec{E}' \cdot d\vec{l} = Ri,$$

où  $i$  est l'intensité qui circule dans le conducteur de A vers C.

#### Propriété 2

La tension aux bornes de la portion de conducteur, en convention récepteur, vaut alors :

$$V_A - V_C = Ri - e_{AC}, \text{ avec } e_{AC} = \int_A^C \vec{E}_m \cdot d\vec{l}.$$

$e_{AC}$  est la force électromotrice d'induction dans le circuit entre A et C (fig. 4).

## D. Courants de Foucault<sup>4</sup>

Soit un conducteur massif mobile et plongé dans un champ magnétique uniforme  $\vec{B}$ .

Dans le référentiel du conducteur, le champ électrique  $\vec{E}'$  s'écrit :

$$\vec{E}' = -\vec{\text{grad}}V + \vec{E}_m, \text{ avec } \vec{E}_m = \vec{v}_e \wedge \vec{B}.$$

Dans un bon conducteur, la loi d'Ohm s'applique<sup>5</sup> :

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}'.$$

Si le conducteur est mobile dans le champ magnétique  $\vec{B}$  sans qu'un générateur n'y impose de courant, on a alors :

$$-\vec{\text{grad}}V = \vec{0} \text{ et } \vec{j} = \sigma \vec{v}_e \wedge \vec{B}.$$

De telles densités de courant volumique sont à l'origine des forces de Laplace qui freinent le mouvement du conducteur<sup>6</sup> : c'est le principe du freinage électromagnétique. De tels dispositifs sont très utiles car ils ne s'usent



pas du fait de l'absence de contact. En revanche, ce type de freinage n'est efficace qu'à des vitesses élevées, c'est pourquoi il n'est utilisé que comme un freinage d'appoint. On rencontre de tels dispositifs dans les poids lourds ou les trains.

## E. Application : le haut-parleur électrodynamique

Le haut parleur est un dispositif permettant la conversion d'énergie électrique en énergie sonore<sup>1</sup>.

### E.1. Description

Un haut-parleur électrodynamique est l'assemblage d'une bobine comportant  $N$  spires de centre  $C$  et de rayon  $a$  solidaire d'une membrane, et d'un aimant (fig. 5). L'aimant est torique à bases circulaires et est immobile dans le référentiel d'étude, tandis que l'ensemble {bobine + membrane} constitue un assemblage mobile de masse  $m$ , astreint à ne pouvoir se déplacer que le long de l'axe  $Oz$  de révolution de l'aimant. La bobine est liée à l'aimant grâce à des ressorts exerçant une force de rappel équivalente à celle d'un ressort de raideur  $k$ . La position d'équilibre du point  $C$  est prise comme origine de l'axe  $Oz$ .

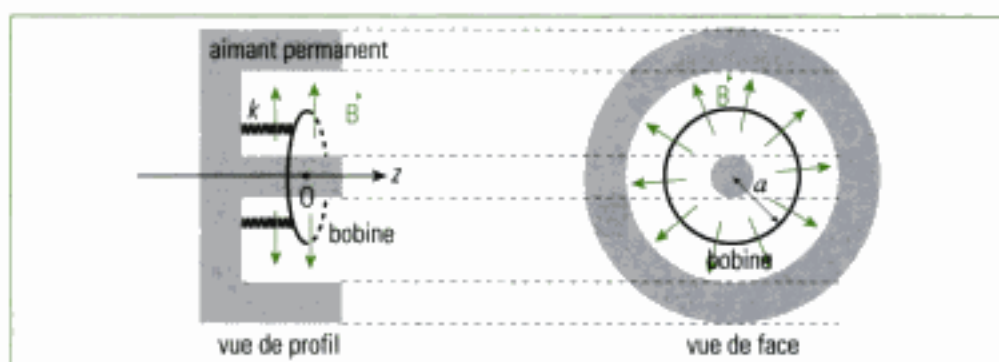


Fig. 5 - Schéma du haut-parleur.

Un générateur idéal de tension sinusoïdale de fréquence  $f$  est branché aux bornes de la bobine, supposée de résistance  $R$  et d'inductance propre  $L$ . En régime forcé, la bobine est parcourue par un courant sinusoïdal  $i$  de fréquence  $f$  et se trouve plongée dans le champ magnétique de l'aimant, supposé radial et de norme constante. Elle subit donc une force de Laplace qui va la mettre en mouvement en générant un mouvement forcé de fréquence  $f$ . Du fait de ce mouvement, les frottements de la membrane avec l'air produisent des ondes sonores.

D'autre part, on note que la bobine est mobile dans un champ magnétique : elle est donc *a priori* siège d'une force électromotrice d'induction qui influe sur l'intensité qui la traverse. Le dispositif couple donc le déplacement  $z(t)$  de la bobine et l'intensité  $i(t)$  du courant qui la traverse : **on parle donc de dispositif électromécanique, ou électrodynamique**<sup>2</sup>.

### E.2. Mise en équations

La mise en équations met en œuvre deux procédures. D'une part l'obtention de l'équation du mouvement de l'attelage mobile est une démarche mécanique, et d'autre part le bilan électrique dans le circuit est effectué en utilisant la loi des mailles.

1. Le cours de physique des ondes sonores montre que l'énergie sonore est une énergie mécanique.

2. Notons que le même dispositif, non alimenté par un générateur, mais excité par des ondes sonores, peut être utilisé comme microphone : la conversion électromécanique se fait dans le sens inverse. En effet, l'onde sonore met la membrane en mouvement, et donc la bobine solidaire. Cette dernière se trouve donc siège d'une force électromotrice d'induction qui crée un courant induit. Il y a aussi des forces de Laplace dues à la présence des courants induits dans le champ magnétique et qui s'opposent au mouvement de la bobine conformément à la loi de Lenz. Il y a conversion et couplage électromécaniques.



1. L'onde sonore est une perturbation mécanique qui provient de la mise en mouvement de l'air engendrée par la membrane du haut parleur.

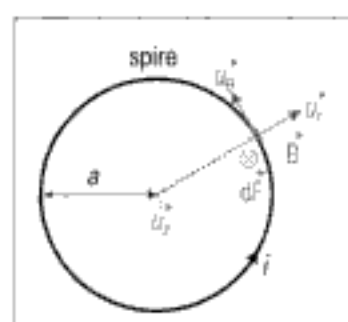


Fig. 6 - Force élémentaire de Laplace appliquée sur la bobine.

2. La tension aux bornes de l'inductance  $L$  est la force électromotrice d'auto-induction.  
3. Le champ magnétique est stationnaire ; il n'y a donc pas de champ électromoteur d'induction

\* de Neumann \*  $\vec{E}_e = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ .

4. On parle aussi de régime forcé.

## Équation mécanique

L'attelage mobile de masse  $m$  ne peut avoir qu'un mouvement de translation. On applique donc le principe fondamental de la mécanique.

Les forces appliquées sur la bobine sont les suivantes :

- le poids  $\vec{P}$ , compensé par la réaction  $\vec{R}$  des supports de l'attelage sur l'aimant.
- la force de rappel élastique  $\vec{T}$  des ressorts :  $\vec{T} = -kz\vec{u}_z$ .
- la force de frottement que l'air exerce sur la bobine. C'est une force de freinage de type visqueux  $\vec{f} = -h\vec{v} = -h\dot{z}\vec{u}_z$ , dont la puissance correspond à celle de l'onde sonore émise<sup>1</sup>.
- la force de Laplace  $\vec{F}$  que subit la bobine plongée dans le champ magnétique de l'aimant (fig. 6).

Un élément de longueur  $d\vec{l} = ad\theta\vec{u}_\theta$  d'une des spires de la bobine subit la force de Laplace élémentaire :

$$d\vec{F} = i d\vec{l} \wedge \vec{B} = i(ad\theta\vec{u}_\theta) \wedge (B\vec{u}_z) = -iaBd\theta\vec{u}_r.$$

On obtient la résultante :  $\vec{F} = N \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} d\vec{F} = -2N\pi iaB\vec{u}_r$ .

En écrivant l'accélération de l'attelage en fonction de sa position  $z$ ,

$$\vec{a} = \frac{d^2 z}{dt^2} \vec{u}_z = \ddot{z} \vec{u}_z,$$

le principe fondamental donne, en projection sur l'axe  $Oz$  :

$$m\ddot{z} + h\dot{z} + kz = -2N\pi iaBi.$$

## Équation électrique

Le générateur inducteur impose la force électromotrice  $E(t)$  dans le bobinage de résistance  $R$  et d'auto-inductance  $L$ <sup>2</sup>.

Il reste à prendre en compte la force électromotrice d'induction  $\epsilon$  provenant du mouvement de l'attelage dans le champ magnétique. Elle se calcule à l'aide du champ électromoteur :

$$\vec{E}_m = \vec{v} \wedge \vec{B} = \dot{z}\vec{u}_z \wedge B\vec{u}_r = B\dot{z}\vec{u}_\theta.$$

La circulation de ce champ électromoteur le long du bobinage permet d'obtenir l'expression de  $\epsilon$ . En prenant  $d\vec{l} = ad\theta\vec{u}_\theta$ , on oriente ce générateur dans le sens trigonométrique. Il vient alors :

$$\epsilon(t) = \oint_{N \text{ spires}} \vec{E}_m \cdot d\vec{l} = \oint_{N \text{ spires}} B\dot{z}\vec{u}_\theta \cdot ad\theta\vec{u}_\theta = 2N\pi Ba\dot{z}.$$

La loi des mailles dans le circuit donne alors :

$$E(t) + \epsilon(t) = Ri + L \frac{di}{dt}, \text{ soit :}$$

$$Ri + L \frac{di}{dt} = E(t) + 2N\pi Ba\dot{z}.$$

Le fonctionnement du haut parleur est donc régi par ce système de deux équations différentielles couplées des fonctions inconnues  $i(t)$  et  $z(t)$ .

## E.3. Solutions

Le générateur délivrant une tension  $E(t)$  sinusoïdale, on cherche la solution en régime sinusoïdal établi<sup>3</sup>.

On pose  $E(t) = E_0 \cos \omega t$ . On utilise la notation complexe pour s'affranchir des dérivées temporelles.

On prend  $\underline{E} = E_0 e^{j\omega t}$  et on écrit  $\dot{z} = j\omega z$ ,  $\ddot{z} = (j\omega)^2 z = -\omega^2 z$  et  $\frac{di}{dt} = j\omega i$ . Le système d'équations devient alors un système de Cramer :

$$\begin{cases} -m\omega^2 z + j\omega h z + k z = -2N\pi a B i \\ R i + j\omega L i = \underline{E} + 2N\pi B a j\omega z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (k + j\omega h - m\omega^2) z + 2N\pi a B i = 0 \\ -2N\pi B a j\omega z + (R + j\omega L) i = \underline{E} \end{cases}$$

La solution se calcule par exemple en utilisant la méthode des déterminants :

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 2N\pi a B \\ \underline{E} & R + j\omega L \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} k + j\omega h - m\omega^2 & 2N\pi a B \\ -2N\pi B a j\omega & R + j\omega L \end{vmatrix}} = \frac{-2N\pi a B}{4N^2\pi^2 B^2 a^2 j\omega + (k + j\omega h - m\omega^2)(R + j\omega L)} \underline{E}$$

$$i = \frac{\begin{vmatrix} k + j\omega h - m\omega^2 & 0 \\ -2N\pi B a j\omega & \underline{E} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} k + j\omega h - m\omega^2 & 2N\pi a B \\ -2N\pi B a j\omega & R + j\omega L \end{vmatrix}} = \frac{k + j\omega h - m\omega^2}{4N^2\pi^2 B^2 a^2 j\omega + (k + j\omega h - m\omega^2)(R + j\omega L)} \underline{E}$$

L'interprétation en est la suivante :

$|z|$  est l'amplitude des oscillations mécaniques autour de la position d'équilibre  $z = 0$ , et  $\arg(z)$  est le déphasage de la fonction  $z(t)$  par rapport à la fonction  $E(t)$ .

De même,  $|i|$  est l'amplitude de l'intensité du courant dans le circuit, et  $\arg(i)$  est le déphasage de la fonction  $i(t)$  par rapport à la fonction  $E(t)$ .

## E.4. Bilan énergétique

Pour effectuer un bilan énergétique, on reprend les deux équations différentielles couplées, que l'on multiplie par la quantité adéquate pour obtenir une puissance.

### Bilan énergétique mécanique

Des forces apparaissant dans l'équation mécanique, il faut la multiplier par la vitesse  $\dot{z}$  :

$$m\ddot{z}\dot{z} + h\dot{z}^2 + kx\dot{z} = -2N\pi a B i \dot{z},$$

$$\text{soit :} \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m \dot{z}^2 + \frac{1}{2} k x^2 \right) = -h \dot{z}^2 - 2N\pi a B i \dot{z}.$$

Pour obtenir un bilan énergétique entre deux instants consécutifs  $t$  et  $t + dt$ , on multiplie cette dernière équation par  $dt$  pour obtenir :

$$\underbrace{d\left(\frac{1}{2} m \dot{z}^2 + \frac{1}{2} k x^2\right)}_{\substack{\text{énergie mécanique} \\ \text{emmagasinée} \\ \text{par la bobine}}} = \underbrace{-h \dot{z}^2 dt}_{\substack{\text{énergie mécanique} \\ \text{donnée par l'air} \\ \text{à la bobine}}} + \underbrace{dW_L}_{\substack{\text{énergie reçue par la bobine} \\ \text{via les forces} \\ \text{de Laplace}}}$$

où  $dW_L = -2N\pi a B i \dot{z} dt$  est l'augmentation d'énergie mécanique provenant du travail de la force de Laplace. Comme cette énergie est négative, on l'interprète comme une perte d'énergie mécanique.

### Bilan énergétique électrique

L'équation électrique est une égalité de tensions. On obtient donc une puissance en multipliant par l'intensité  $i$  :

$$Ri^2 + Li \frac{di}{dt} = E(t)i + 2N\pi B a i \dot{z},$$

$$\text{soit :} \quad Ri^2 + \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} Li^2 \right) = E(t)i + 2N\pi B a i \dot{z}.$$

Pour obtenir un bilan énergétique entre deux instants consécutifs  $t$  et  $t + dt$ , on multiplie cette dernière équation par  $dt$  et il vient :

$$Ri^2dt + d\left(\frac{1}{2} Li^2\right) = E(t)idt + dW_e,$$

où  $dW_e = 2N\pi B a i \dot{z} dt$  est le travail apporté par la force électromotrice d'induction.

On reconnaît les quantités suivantes :  $d\left(\frac{1}{2} Li^2\right)$  est l'accroissement d'énergie emmagasinée par la bobine,  $Ri^2dt$  est l'énergie dépensée par effet Joule et  $Eidt$  est l'énergie apportée par le générateur.

On peut aussi écrire :

$$\underbrace{Eidt}_{\text{énergie fournie par le générateur}} + \underbrace{dW_e}_{\text{énergie fournie par le générateur de force électromotrice d'induction}} = \underbrace{Ri^2dt}_{\text{énergie perdue par effet Joule}} + \underbrace{d\left(\frac{1}{2} Li^2\right)}_{\text{énergie emmagasinée dans la bobine}}$$

### Couplage électromécanique parfait

On s'aperçoit que  $dW_e = 2N\pi a B v i dt = -dW_L$ , soit :

$$dW_e + dW_L = 0.$$

Cette équation traduit le fait que le transfert entre l'énergie électrique de la force électromotrice induite et le travail mécanique de la force de Laplace est parfait. Le couplage électromécanique est alors parfait.

### Bilan énergétique global

En éliminant cette énergie  $dW_e = -dW_L$  entre les deux équations énergétiques, on obtient le bilan :

$$\underbrace{Eidt}_{\text{énergie fournie par le générateur}} = \underbrace{Ri^2dt + h v^2 dt}_{\text{énergie dissipée}} + \underbrace{d\left(\frac{1}{2} Li^2 + \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k z^2\right)}_{\text{énergie emmagasinée par la bobine}}$$

L'énergie fournie par le générateur sert donc d'une part à augmenter les différentes formes d'énergie du système, et d'autre part à nourrir les phénomènes dissipatifs.

### Rendement

En régime sinusoïdal permanent, intégrons l'équation précédente sur une période, et divisons par cette période ; on obtient alors le bilan des puissances moyennes<sup>1</sup> :

$$\langle Ei \rangle = \langle Ri^2 \rangle + \langle h v^2 \rangle + \left\langle \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} Li^2 + \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k z^2 \right) \right\rangle.$$

Mais comme les diverses formes d'énergie sont des fonctions périodiques du temps, le dernier terme de l'égalité est nul<sup>2</sup>. On a donc :

$$\langle Ei \rangle = \langle Ri^2 \rangle + \langle h v^2 \rangle.$$

En valeur moyenne, la puissance fournie par le générateur sert donc à nourrir les phénomènes dissipatifs. Dans le modèle adopté, la puissance de la force de type fluide est en fait la puissance sonore rayonnée : c'est donc la puissance « utile ».

En revanche, la puissance de dissipation par effet Joule constitue bel et bien une perte.

On peut donc définir le rendement du haut parleur suivant :

$$\eta = \frac{\langle h v^2 \rangle}{\langle Ri^2 \rangle + \langle h v^2 \rangle}.$$

Ce dernier est d'autant plus élevé que  $h$  est grand ou  $R$  petit<sup>3</sup>.

1. On rappelle la notation :

$$\langle u(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt,$$

si  $T$  est une période de  $u$ .

2. Soit  $U = \frac{1}{2} Li^2 + \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k z^2$ .

Alors on a :

$$\left\langle \frac{dU}{dt} \right\rangle = \frac{1}{T} \int_0^T dU = \frac{1}{T} [U(T) - U(0)] = 0.$$

De manière générale, les dérivées temporelles de différentielles totales périodiques ont une valeur moyenne nulle dans le temps.

3. Les haut-parleurs de 4  $\Omega$  sont ainsi meilleurs que ceux de 8  $\Omega$ .



Hidden page

## → Savoir faire

- ❶ Identifier la partie du circuit qui est mobile et déterminer le champ électromoteur en chacun des points mobiles du circuit.
- ❷ Calculer la circulation du champ électromoteur le long de la partie mobile du circuit et faire apparaître le schéma électrique du générateur de tension associé, en prenant garde à orienter sa flèche dans le sens choisi pour calculer la circulation.
- ❸ Choisir un sens conventionnel pour l'intensité du courant (on prend généralement le même sens que l'on avait choisi pour calculer la circulation, mais ce n'est pas une obligation) et appliquer la loi des mailles pour calculer l'intensité  $i$  recherchée.

## → Application

- ❶ On calcule le champ électromoteur d'induction dans le barreau mobile MN :

$$\vec{E}_m = \vec{v} \wedge \vec{B} = v\vec{u}_x \wedge B\vec{u}_z = -vB\vec{u}_y.$$

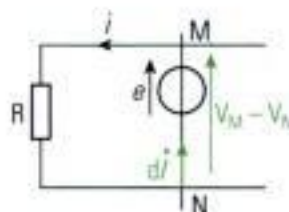
- ❷ On calcule ensuite la force électromotrice  $\epsilon$  d'induction, en calculant la circulation du champ électromoteur. Le générateur de force électromotrice  $\epsilon$  est orienté dans le sens de la circulation :

$$\epsilon = \int_N^M \vec{E}_m \cdot d\vec{l} = \int_{y=0}^{y=a} -vB\vec{u}_y \cdot dy\vec{u}_y = -vaB.$$

- ❸ Ce générateur impose un courant induit d'intensité  $i$ , que l'on oriente ici dans le sens du générateur qui l'impose<sup>1</sup>.

Il reste à appliquer la loi des mailles. Elle donne ici :

$$V_M - V_N = Ri = \epsilon = -vaB, \text{ soit } i = \frac{-vaB}{R}.$$

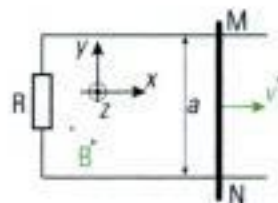


L'intensité trouvée est négative, ce qui signifie que le courant induit a le sens contraire au sens conventionnel choisi<sup>2</sup>.

## Méthode n° 2

### Comment calculer l'intensité du courant induit dans un circuit mobile ou déformable en utilisant le flux magnétique ?

On cherche l'expression de l'intensité  $i$  du courant induit dans un circuit déformable constitué par des rails conducteurs parallèles distants d'une largeur  $a$ , reliés d'un côté par une résistance  $R$  et de l'autre côté par un barreau mobile MN se déplaçant à la vitesse  $v$  constante dans la direction des rails. Ce circuit rectangulaire est plongé dans un champ magnétique  $\vec{B}$  orthogonal à son plan.



## → Savoir faire

- ❶ Calculer le flux  $\phi$  du champ magnétique à travers le circuit. Si  $\phi$  reste nul lorsque le circuit bouge, alors appliquer la méthode n° 1 : c'est la seule applicable. Si  $\phi$  est non nul et varie lors du mouvement du circuit, alors passer à ❷.

1. Le choix de cette orientation n'est pas obligatoire. Si on choisit de flécher le courant dans l'autre sens, alors on le trouvera de signe contraire.

2. On pouvait s'en douter, vu que la force électromotrice était négative.



- ② Utiliser la loi de Faraday pour calculer la force électromotrice d'induction. Placer le générateur associé dans le circuit, en prenant garde à orienter sa flèche dans le sens positif associé au choix de la normale au circuit qui a servi à calculer  $\phi$ .
- ③ Choisir un sens conventionnel pour l'intensité du courant (on prend généralement le même sens que l'on avait choisi pour calculer la circulation, mais ce n'est pas une obligation) et appliquer la loi des mailles pour calculer l'intensité  $i$  recherchée.

### → Application

① Le circuit est fermé : on pourra donc appliquer la loi de Faraday. On choisit une normale  $\vec{n}$  au circuit, et de ce fait on oriente le circuit positivement via la règle du tire bouchon. On prend par exemple  $\vec{n} = +\vec{u}_z$ , qui a le même sens que le champ  $\vec{B}$ .

On calcule le flux magnétique  $\phi$  à travers ce circuit :

$$\phi = \iint_S \vec{B} \cdot \vec{u}_z \cdot \vec{n} \, dS = Bax.$$

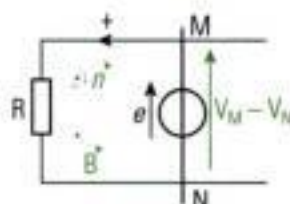
② On en déduit la force électromotrice d'induction  $\varepsilon$  grâce à la loi de Faraday, le sens de la flèche du générateur étant le sens positif choisi :

$$\varepsilon = -\frac{d\phi}{dt} = -Ba \frac{dx}{dt} = -Bav.$$

On retrouve le résultat de la méthode précédente.

③ Pour calculer l'intensité du courant induit, il reste à lui donner un sens positif, par exemple le sens positif déjà choisi<sup>1</sup>, puis on applique la loi des mailles<sup>2</sup>.

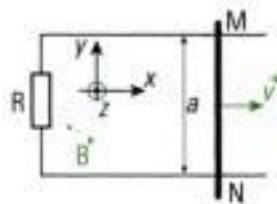
$$V_M - V_N = Ri = \varepsilon = -vab, \text{ soit } i = \frac{-vab}{R}.$$



### Méthode n° 3

### Comment vérifier le sens du courant induit dans un circuit mobile sans effectuer de calcul ?

On cherche le sens de l'intensité  $i$  du courant induit dans un circuit déformable constitué par des rails conducteurs parallèles distants d'une largeur  $a$ , reliés d'un côté par une résistance  $R$  et de l'autre côté par un barreau mobile  $MN$  se déplaçant à la vitesse  $v$  constante dans la direction des rails. Ce circuit rectangulaire est plongé dans un champ magnétique  $\vec{B}$  orthogonal à son plan.



### → Savoir faire

- ① On identifie un paramètre dont la variation temporelle donne naissance au phénomène d'induction.
- ② On donne un sens conventionnel au courant induit, choisi au hasard. On cherche les caractéristiques qualitatives du champ magnétique créé par ce courant : direction et sens.
- ③ On utilise la loi de Lenz : le champ magnétique créé par ce courant doit s'opposer à la variation temporelle choisie en ①. On en déduit le sens du courant induit.

1. On n'est pas obligé de garder le sens positif choisi auparavant, lequel n'était lié qu'au sens de la flèche du générateur de force électromotrice  $\varepsilon$ .

2. On remarque que l'on retrouve, à ce stade de la démarche, une situation identique à celle de la méthode précédente.



- ④ La partie mobile du circuit, traversée par le courant induit, subit une force de Laplace qui doit s'opposer au mouvement créateur d'induction (loi de Lenz). On trouve qualitativement le sens du courant induit pour que la force de Laplace s'oppose au mouvement du circuit.

### → Application

① La cause de l'induction est l'augmentation du flux magnétique  $\phi$ .  $\phi$  augmente car la surface du circuit augmente, vu le sens choisi pour la normale  $\vec{n}$  du circuit.

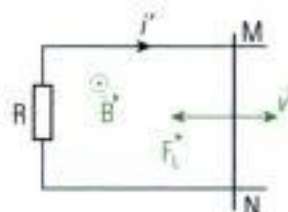
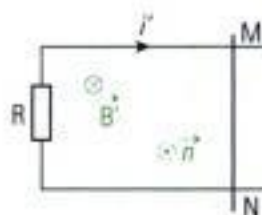
② Le courant induit  $i'$  crée un champ magnétique  $\vec{B}'$  dont le sens est lié à celui du courant via la règle du tire bouchon ou du bonhomme d'Ampère.

③ Le flux inducteur  $\Phi$  étant positif et croissant avec le temps, il faut que le flux  $\Phi'$  de  $\vec{B}'$  soit négatif : il doit s'opposer à l'augmentation du flux inducteur  $\phi$ . On voit alors que  $\vec{B}'$  doit être dirigé selon  $-\vec{u}_z$ .

Le sens de  $\vec{B}'$  est lié à celui du courant induit  $i'$  via la règle du tire bouchon : on trouve que le courant induit  $i'$  doit aller de M vers N, ce qui est conforme aux résultats quantitatifs trouvés dans les méthodes 1 et 2.

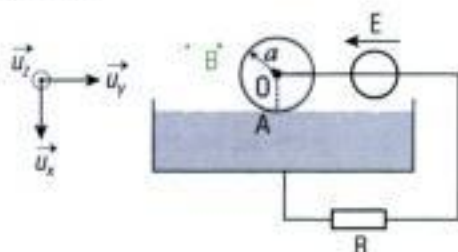
④ La cause de l'induction est le mouvement du barreau MN. L'intensité  $i'$  du courant induit aura donc un sens tel que la force de Laplace  $\vec{F}_L$  que subit le barreau MN s'oppose au mouvement du barreau. On en déduit donc le sens de  $i'$  via la formule :

$$\vec{F}_L = i' \vec{MN} \wedge \vec{B}.$$



Hidden page

l'intensité du courant et  $\omega(t)$  la vitesse angulaire de rotation du moteur. Le courant est nul et la roue au repos à l'instant  $t = 0$ . On allume le générateur à l'instant  $t = 0$ .

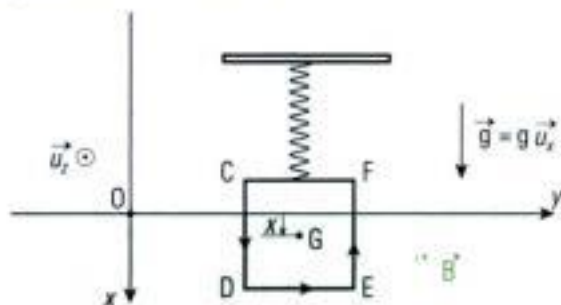


- 1) Analyser qualitativement le fonctionnement du dispositif.
- 2) On admet que les forces de Laplace subies par le disque sont équivalentes à celles que subirait un conducteur filiforme confondu avec le rayon OA et parcouru par un courant  $i(t)$ . Établir l'équation mécanique du problème en supposant que la roue est soumise en outre à un couple de frottements de la forme  $-f \vec{\omega}(t)$ .
- 3) Déterminer la force électromotrice  $e$  induite entre les points O et A dans la roue.
- 4) En déduire l'équation électrique du problème.
- 5) Établir l'expression de  $\omega(t)$  et commenter l'influence de B.

## Niveau 2

### Ex. 5

Un cadre de cuivre filiforme, de résistance  $R$ , de forme carrée de côté  $a$ , de masse  $m$ , est accroché à un ressort vertical de raideur  $k$  et de masse négligeable. Le plan du cadre est vertical et, à l'équilibre, la moitié inférieure du cadre est située dans un champ magnétique uniforme de module  $B$ , stationnaire et perpendiculaire au cadre.

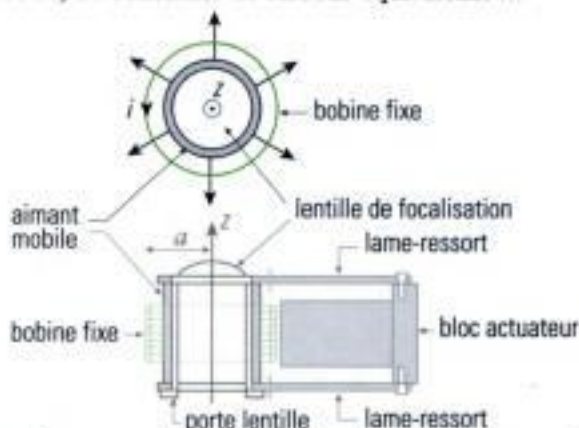


- 1) On abaisse le cadre d'une hauteur  $a/2$  et on le lâche sans vitesse initiale. Établir l'équation différentielle du mouvement du cadre (repéré par sa position par rapport à l'équilibre).
- 2) On donne  $k = 0,4 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$ ,  $B = 0,1 \text{ T}$ ,  $g = 10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ ,  $R = 0,5 \text{ m}\Omega$ ,  $m = 50 \text{ g}$  et  $a = 10 \text{ cm}$ . Déterminer la nature de la loi horaire.

### Ex. 6 Modèle électromécanique d'un actuateur

La position d'une lentille permettant la lecture d'un CD doit être constamment ajustée en fonction de la position du CD pour maintenir le diamètre du spot de lecture le plus près possible de sa valeur minimale  $d = 1 \mu\text{m}$ , quelles que soient les irrégularités de surface du CD.

Le déplacement de la lentille est réalisé au moyen d'un actuateur constitué d'une bobine magnétique fixe et d'un équipement mobile formé d'un aimant mobile creux fixé sur le porte-lentille, lui-même lié au bloc actuateur par deux lames-ressorts. Celles-ci exercent une force de rappel élastique sur l'équipage mobile, de constante de raideur équivalente  $k$ .



Le champ magnétique produit par l'aimant est radial à l'extérieur de celui-ci et de module constant  $B$  à la distance correspondant au rayon moyen  $a$  de la bobine. Cette dernière est de résistance électrique  $R$  et de coefficient d'auto-induction  $L$ .

Pour les calculs, on supposera la bobine constituée de  $N$  spires jointives circulaires de rayon  $a$ , coaxiale à l'aimant.

- 1) Quelle est la nature de la force  $\vec{F}$  exercée par le champ magnétique  $\vec{B}$  de l'aimant sur la bobine ? Comment est-elle orientée si le courant  $i(t)$  circule dans le sens direct autour de l'axe vertical ascendant  $Oz$  orienté par le vecteur unitaire  $\vec{u}_z$  ?  
On notera A et C les extrémités de la bobine. On la parcourt dans le sens direct en allant de A vers C.
- 2) Calculer précisément l'expression de cette force en coordonnées cylindriques en fonction de  $i(t)$ ,  $N$ ,  $B$  et  $a$ .
- 3) En déduire l'expression de la force  $\vec{F}$  exercée par la bobine sur l'équipage mobile porte-lentille.
- 4) Soit  $z = 0$  la position de repos de l'équipage mobile de masse  $m$ , en focalisation parfaite. Lors d'une perturbation (choc, poussière, etc.), l'équipage mobile effectue un déplacement  $z(t)$  fonction du temps  $t$ . Établir l'équation différentielle mécanique de son mouvement suivant l'axe  $Oz$  (on négligera les forces de frottement et le poids).
- 5) Préciser qualitativement de quels phénomènes d'induction la bobine parcourue par un courant  $i(t)$



est le siège. On calculera si nécessaire l'expression de la force électromotrice associée à chaque phénomène en utilisant au maximum les données de l'énoncé.

6) La bobine est alimentée par la tension  $u_{AC}(t) = u_i(t)$ . Représenter le schéma électrique équivalent de la bobine en faisant apparaître l'intensité algébrique  $i(t)$  générée par  $u_i(t)$ . En déduire l'équation électrique de la bobine.

7) On étudie la réponse harmonique de l'actuateur en supposant que toutes les grandeurs  $u$ ,  $i$ ,  $z$  sont des fonctions sinusoïdales de  $t$ , de même pulsation imposée  $\omega$ . On les écrira sous forme complexe  $\Delta e^{j\omega t}$ . Montrer que la fonction de transfert harmonique de l'actuateur est de la forme :

$$H(\omega) = \frac{Z}{U_s} = \frac{H_0}{\left(1 + j \frac{\omega}{\omega_1}\right) \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) + j \frac{\omega}{\omega_2}}$$

Déterminer les expressions de  $H_0$ ,  $\omega_0$ ,  $\omega_1$  et  $\omega_2$  en fonction de  $N$ ,  $a$ ,  $B$ ,  $k$ ,  $m$ ,  $R$  et  $L$ .

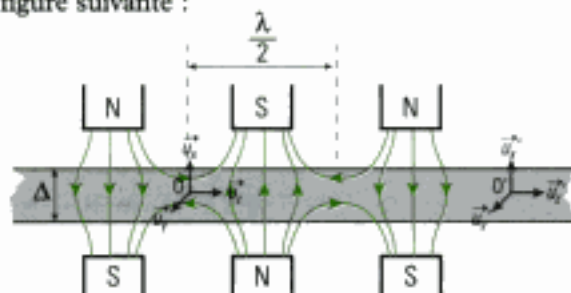
8) Applications numériques :  $m = 5 \text{ g}$  ;  $k = 10 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$  ;  $N = 300$  ;  $a = 5 \text{ mm}$  ;  $R = 10 \text{ }\Omega$  ;  $L = 1 \text{ mH}$  ;  $B = 0,2 \text{ T}$ .

Calculer  $\omega_0$ ,  $\omega_1$  et  $\omega_2$ .

Tiré de l'écrit ELA 2000

## Ex. 7 Freinage par courants de Foucault

On considère une plaque de conductivité électrique  $\sigma$  de perméabilité  $\mu_0$  et d'épaisseur  $\Delta$  située dans un champ magnétique produit par une structure périodique d'aimants permanents de grande dimension dans la direction de  $\vec{u}_y$ . Les lignes de champ magnétique et la disposition des aimants sont données sur la figure suivante :



Le repère  $(R) = (\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$  est lié aux aimants, il est fixe ; son origine  $O$  est dans le plan équidistant de deux aimants successifs, et  $(\vec{u}_y, \vec{u}_z)$  est plan de symétrie pour l'ensemble du système.

Le repère  $(R') = (\vec{u}'_x, \vec{u}'_y, \vec{u}'_z)$ , d'origine  $O'$  est lié à la plaque (repère relatif).

La plaque se déplace avec la vitesse  $\vec{V} = V\vec{u}'_x$  et on néglige le champ magnétique produit par les courants de Foucault. Le champ magnétique produit par les aimants est de la forme :

$\vec{B} = B_x(x, z)\vec{u}_x + B_z(x, z)\vec{u}_z$  avec  $B_x(x, z)$  fonction paire en  $x$  et impaire en  $z$  et  $B_z(x, z)$  impaire en  $x$  et paire en  $z$ .

Étant donné la périodicité de la distribution des aimants, les composantes  $B_x$  et  $B_z$  du champ magnétique peuvent être développées en série de Fourier :

$$B_x(x, z) = \sum_{n=1}^{+\infty} B_{x, \max}^{(n)}(x) \sin\left(\frac{2\pi n}{\lambda} z\right)$$

$$B_z(x, z) = \sum_{n=1}^{+\infty} B_{z, \max}^{(n)}(x) \cos\left(\frac{2\pi n}{\lambda} z\right)$$

1) Le champ magnétique étant supposé dû aux seuls aimants, il obéit à  $\Delta B_x = 0$  et  $\Delta B_z = 0$ , (propriété que l'on ne cherchera pas à démontrer ici) où  $\Delta$  est l'opérateur laplacien.

a) Démontrer par des raisons de symétries que  $B_x(x, z)$  est une fonction paire en  $x$  et impaire en  $z$  et  $B_z(x, z)$  une fonction impaire en  $x$  et paire en  $z$ .

b) Trouver les équations différentielles satisfaites par  $B_{x, \max}^{(n)}(x)$  et  $B_{z, \max}^{(n)}(x)$ .

c) Donner les solutions générales de ces équations en tenant compte de la parité en  $x$  des composantes  $B_x(x, z)$  et  $B_z(x, z)$ .

2) Utiliser la relation  $\text{div} \vec{B} = 0$  pour obtenir les expressions de  $B_x(x, z)$  et  $B_z(x, z)$  en fonction d'une seule série de coefficients  $A_n$ .

3) Quelles sont les composantes du champ magnétique  $\vec{B}'$  dans le repère  $(R')$  lié à la plaque ?

4) Calculer le champ électromoteur  $\vec{E}_m$  induit dans la plaque en mouvement, le vecteur densité de courant  $\vec{j}$  et les deux composantes du vecteur densité volumique de force  $\frac{d\vec{F}}{d\tau} = \vec{j} \wedge \vec{B}$  agissant sur la plaque.

5) Calculer les composantes  $F_x$  et  $F_z$  de la force magnétique qui s'exerce sur le domaine  $D$  :

$$D = \left\{ x \in \left[-\frac{\Delta}{2}; \frac{\Delta}{2}\right] ; y \in [0; l] ; z \in \left[-\frac{\lambda}{2}; \frac{\lambda}{2}\right] \right\},$$

ainsi que la puissance  $P_f$  de la force  $F_x$ .

6) Calculer la puissance  $P_j$  dissipée par effet Joule dans le domaine  $D$ .

7) Comparer les puissances  $P_f$  et  $P_j$  et discuter.

Tiré de l'écrit CCP PC 1999.

## Niveau 3

### Ex. 8

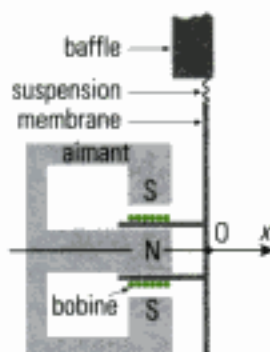
On peut utiliser des systèmes conducteurs massifs mobiles dans un champ magnétique pour créer des générateurs dits « unipolaires » et capables de produire des intensités électriques très élevées avec de petites forces électromotrices. Nous étudions l'un de ces systèmes, constitué par un disque conducteur homogène, de masse  $m$  et de rayon  $a$  en rotation autour d'un axe  $z'z$  conducteur (de rayon négligeable devant  $a$ ) avec la vitesse angulaire  $\vec{\omega} = \omega\vec{u}_z$  imposée par un moteur, et plongé dans un champ magnétique uniforme  $\vec{B} = B\vec{u}_z$ , dit « axial ».

Hidden page

### Ex. 10

Un haut-parleur est représenté sur la figure ci-contre.

De symétrie de révolution autour de l'axe  $x$  indiqué, il se compose d'un aimant permanent fixe, assurant un champ magnétique radial d'intensité constante  $B$  dans son entrefer.



La membrane, qui est souvent dans la réalité de forme conique afin d'assurer sa rigidité, sera dans ce problème considérée comme un disque plan rigide de masse  $m$ . Cette membrane est fixée sur un baffle plan, rigide, immobile, de grandes dimensions, par une suspension souple lui permettant un déplacement suivant l'axe  $x$ . Sa position  $x(t)$  est ramenée par cette suspension à un positionnement moyen par une force de rappel proportionnelle à son déplacement  $F = -kx$ . Sur cette membrane est collée un cylindre portant une bobine et la positionnant dans l'entrefer de l'aimant. On supposera que l'amplitude de déplacement de la bobine ne lui permettra pas de quitter la région de l'entrefer où le champ magnétique est radial et d'amplitude constante. Cette bobine reçoit un signal et on désignera par  $E(t)$  la tension qui lui est appliquée et  $I(t)$  le courant qui la parcourt. Les caractéristiques de cette bobine sont une longueur de fil  $l$ , une résistance  $R$  et un coefficient d'auto-induction  $L$ .

Dans cet exercice, on ne s'intéresse pas au couplage du haut-parleur avec l'air, que l'on modélise par une force visqueuse  $-f\dot{x}$ .

- 1) Quelles sont les forces s'exerçant sur la membrane ? En déduire son équation du mouvement.
- 2) Quelle est la force électromotrice  $\epsilon$  d'induction ? En déduire l'équation différentielle régissant le circuit électrique.
- 3) On alimente la bobine par un signal sinusoïdal de pulsation  $\omega$ . Déduire des équations précédentes l'impédance complexe  $Z$  du circuit.
- 4) Montrer que, du point de vue électrique, l'effet de l'aimant revient à ajouter à la résistance  $R$  et à l'inductance  $L$  de la bobine des termes  $R'$  et  $L'$  que l'on calculera et exprimera en fonction de  $a(\omega)$  (dépendant de la fréquence) et  $b$ .

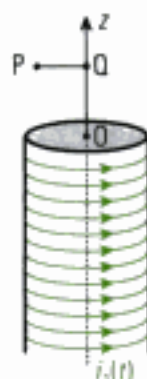
$$a(\omega) = \frac{k}{m} - m\omega^2 \quad ; \quad b = \frac{B^2 l^2}{f}$$

En quelles unités s'expriment ces quantités ?

Tiré de l'écrit ENS 2002

### Ex. 11 Étude du mouvement d'une spire dans le champ magnétique créé par un solénoïde

On considère un solénoïde circulaire  $S$  de rayon  $a$  et comportant  $n$  spire par unité de longueur. Ce solénoïde d'axe  $Oz$  est parcouru par un courant  $i_1(t) = I_0 \cos \omega t$  comme indiqué sur le schéma suivant. Il sera supposé « semi-infini » et placé dans le demi-espace  $z < 0$ .



Le champ créé par le solénoïde au point  $Q$  de cote  $z > 0$  est  $\vec{B}(Q)$  :

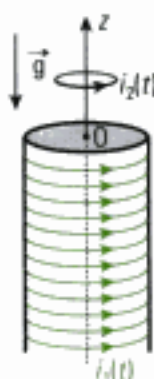
$$\vec{B}(Q) = \frac{\mu_0 n i_1(t)}{2} \left( 1 - \frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}} \right) \vec{u}_z$$

On suppose que le champ magnétique créé par le solénoïde en un point  $P$  à l'extérieur du solénoïde proche de l'axe est donné par l'expression suivante :

$$\vec{B}(P) = -\frac{r}{2} \frac{dB(z)}{dz} \vec{u}_r + B(z) \vec{u}_z$$

où  $B(z)$  est le champ magnétique créé par le solénoïde sur le point  $Q$  de l'axe  $Oz$  de même cote que  $P$ .

Une bobine plate fermée d'axe  $Oz$ , de rayon  $r$ , de masse  $m$  et comportant  $N$  spires est maintenue au repos à la cote  $z > 0$ . À l'instant  $t = 0$ , on lâche la bobine plate. On étudie le mouvement de celle-ci en procédant par modélisations successives. La bobine est supposée en mouvement de translation selon l'axe  $Oz$ .



Dans tout le problème, on supposera négligeable l'induction engendrée par le mouvement de la bobine plate devant celle engendrée par la variation temporelle du champ magnétique.

- 1) Quelle est l'origine du courant  $i_2(t)$  qui traverse la bobine plate ?
- 2) On suppose que la bobine plate possède une résistance  $R_2 = 10^{-2} \Omega$  et que l'on néglige son inductance propre.
  - a) Déterminer l'inductance mutuelle  $M(z)$  entre le solénoïde et la bobine plate placée à la cote  $z$ .
  - b) Quelle est la force électromotrice induite dans la spire en fonction de  $M(z)$  et  $i_1(t)$  ?
  - c) En déduire l'expression du courant  $i_2(t)$  dans la spire en fonction de  $i_1(t)$ .
- 3) Montrer que la force de Laplace exercée sur la bobine plate est portée par la direction  $Oz$  et déter-



Hidden page

# Solutions des exercices

## Exercices de niveau 1

### Exercice 1

On met en œuvre la méthode n° 2.

Tout d'abord, on pose un repère  $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$  tel que :  $\vec{B} = B\vec{u}_x$ . On définit ensuite la normale  $\vec{n}$  au circuit telle que  $\vec{n}(t=0) = \vec{u}_x$  :  $\vec{n} = \cos\omega t \vec{u}_x + \sin\omega t \vec{u}_y$ .

On oriente alors le cadre tel que sa normale soit  $\vec{n}$ .

Le flux du champ magnétique  $\vec{B}$  à travers une spire est donné par

$$\Phi = N \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \text{ où } S \text{ est la surface du cadre.}$$

$$\text{Or } \vec{B} \cdot d\vec{S} = B dS \cos\omega t.$$

$$\text{D'où : } \Phi = BS \cos\omega t = Ba^2 \cos\omega t.$$

Le flux à travers chaque spire du cadre est identique. De ce fait, le flux  $\Phi_C$  à travers le cadre est égal à  $N$  fois le flux à travers une spire.

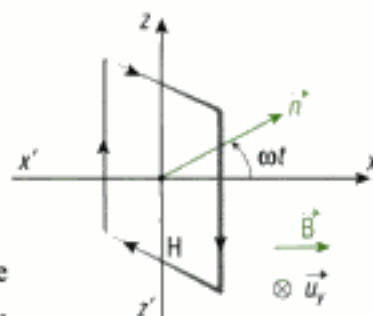
$$\text{On trouve alors } \Phi_C = N\Phi = N Ba^2 \cos\omega t.$$

On en déduit la force électromotrice à partir de la loi de Faraday :

$$e = - \frac{d\Phi_C}{dt} \text{ où } e \text{ est orienté dans le sens du contour.}$$

On trouve alors :

$$e = N Ba^2 \omega \sin\omega t.$$



### Exercice 2

1) Le rail mobile est soumis à son poids. Il va donc se mettre en mouvement.

Ce rail est placé dans un circuit conducteur fermé. Sa mobilité est alors source de courant induit dans le circuit. Ce rail parcouru par le courant induit placé dans le champ magnétique  $\vec{B}$  est soumis à la force de Laplace. D'après la loi de Lenz, cette force s'oppose au mouvement de la barre et est dirigée selon  $\vec{u}_z$ .

Il faut maintenant réaliser une étude plus poussée pour connaître l'évolution du mouvement du rail.

2) On met en œuvre la méthode n° 1.

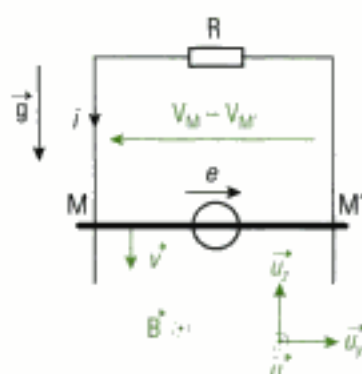
a) Par définition,  $e = \int_M^{M'} \vec{E}_m \cdot d\vec{l}$  où  $\vec{E}_m = \vec{v} \wedge \vec{B}$ ,  $\vec{v}$  est la vitesse du rail et  $d\vec{l} = dy \vec{u}_y$  dans le sens  $M$  vers  $M'$ .

On peut supposer que le rail se déplace dans le sens de  $\vec{g}$  puisqu'il est au départ soumis à son poids. Donc  $\vec{v} = -v(t)\vec{u}_z$ .

$$\text{On en déduit } \vec{E}_m = -v(t)B\vec{u}_y \text{ soit } e = \int_0^l -v(t)B dy.$$

D'où :

$$e = -v(t)Bl.$$



On peut aussi calculer les flux  $\phi$  et  $\phi + d\phi$  du champ magnétique à travers la surface délimitée par les rails et la résistance  $R$  aux deux instants consécutifs  $t$  et  $t + dt$ . La surface vaut alors respectivement  $S$  et  $S + vdt$ . On en déduit la force électromotrice par la loi de Faraday.

b) Le rail est placé dans un montage constitué d'une résistance  $R$  et de conducteurs fixes de résistance négligeable devant  $R$ .

Le rail, de résistance négligeable, est équivalent à un générateur de tension parfait.

On a :  $V_M - V_{M'} = -e = -Ri(t)$  dans le sens indiqué sur le schéma.

On en déduit l'équation électrique :

$$e = Ri(t) = -v(t)Bl. \quad (1)$$

c) Afin d'établir l'équation mécanique, il faut étudier les forces qui s'exercent sur le rail.

Le rail est soumis à son poids  $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{u}_z$  et à la force de Laplace, puisqu'il est parcouru par

un courant  $i(t)$ ,  $\vec{F}_L = \int_M^{M'} i(t)d\vec{l} \wedge \vec{B} = -i(t)Bl\vec{u}_z$  où  $d\vec{l} = dy\vec{u}_y$  est orienté dans le sens M vers M'.



On met en œuvre la méthode n° 3 pour vérifier le sens du courant.

Dans cet exemple,  $v(t)$  est supposé positif et le courant induit est donc négatif. On retrouve donc une force de Laplace orientée dans le sens inverse du poids qui s'oppose donc aux causes du mouvement.

La loi de Lenz est bien vérifiée.

On applique la deuxième loi de Newton au rail :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{P} + \vec{F}_L = [-mg - i(t)Bl]\vec{u}_z.$$

Avec la notation  $\vec{v} = -v(t)\vec{u}_z$ , on en déduit l'équation mécanique :

$$-m \frac{dv}{dt} = -mg - i(t)Bl. \quad (2)$$

d) À partir des équations (1) et (2), on obtient par substitution :

$$\frac{mR}{(Bl)^2} \frac{di(t)}{dt} + i(t) = \frac{-mg}{Bl}. \quad (3)$$

e) L'équation (3) est une équation différentielle du premier ordre dont la solution est la somme d'une solution générale de l'équation sans second membre  $i_g(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$  où  $\tau = \frac{mR}{(Bl)^2}$  et de la solution particulière de l'équation avec second membre  $i_p(t) = \frac{-mg}{Bl}$ .

Alors :  $i(t) = i_g(t) + i_p(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}} - \frac{mg}{Bl}$ .

Or le courant est nul à l'instant  $t = 0$  car la barre est immobile à cet instant.

On en déduit :  $A = \frac{mg}{Bl}$ .

D'où :  $i(t) = \frac{-mg}{Bl} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$  avec  $\tau = \frac{mR}{(Bl)^2}$ .

d) On déduit de l'équation (1) :  $v(t) = \frac{-R}{Bl} i(t) = \frac{mgR}{(Bl)^2} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$ .

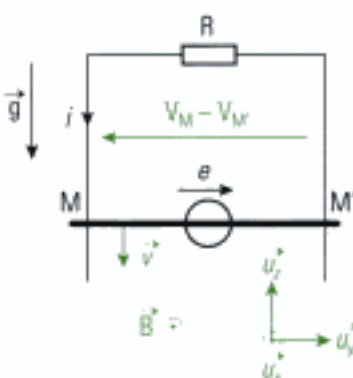
3) La puissance des forces de Laplace est de la forme

$$\mathbf{P} = \vec{F}_L \cdot \vec{v} = -i(t)Bl\vec{u}_z \cdot -v(t)\vec{u}_z = i(t)Blv(t) = -R[i(t)]^2.$$

On note que cette puissance est égale à celle dissipée par effet Joule dans le résistor. On peut en conclure qu'il y a transfert d'énergie.

L'énergie mécanique reçue par le rail du fait de son mouvement est transformée en énergie électrique qui est fournie au circuit extérieur.

Le circuit extérieur étant une résistance, elle dissipe cette énergie sous forme thermique (effet Joule).





Hidden page

• La puissance des forces de Laplace est égale à N fois la puissance des forces de Laplace sur une spire :  $P = N(\vec{F}_{L1} \cdot \vec{V}u_x + \vec{F}_{L3} \cdot \vec{V}u_x)$ .

$$D'où : P = Ni(t)B_m a V \left[ \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} \left(x_G + \frac{a}{2}\right)\right) - \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} \left(x_G - \frac{a}{2}\right)\right) \right].$$

 On se rappelle de la formule trigonométrique :  $\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$ .

$$x_G = Vt \text{ donne alors : } P = 2Ni(t)B_m a V \sin\left(\frac{\pi a}{\lambda}\right) \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} Vt\right).$$

En remplaçant  $i(t)$ , on obtient :

$$P = \frac{2N^2 B_m^2 a^2 V \lambda}{\pi R} \left(\omega - \frac{2\pi}{\lambda} V\right) \sin^2\left(\frac{\pi a}{\lambda}\right) \sin^2\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} Vt\right).$$

b) La valeur moyenne est définie par  $\langle P \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T P dt$ .

Le calcul de  $\langle P \rangle$  revient au calcul de  $\langle \sin^2(\omega t + \varphi) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \sin^2(\omega t + \varphi) dt$  où  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ .

Or,


$$\frac{1}{T} \int_0^T \sin^2(\omega t + \varphi) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1 - \cos(2\omega t + \varphi)}{2} dt = \frac{1}{2} - \frac{1}{4T\omega} [\sin(2\omega t + \varphi)]_0^T = \frac{1}{2}.$$

La valeur moyenne de  $\sin^2\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} Vt\right)$  est donc égale à  $\frac{1}{2}$ .

$$\text{Alors : } \langle P \rangle = \frac{N^2 B_m^2 a^2 V \lambda}{\pi R} \left(\omega - \frac{2\pi}{\lambda} V\right) \sin^2\left(\frac{\pi a}{\lambda}\right).$$

 Cette expression est vraie pour tout  $\lambda$ , même pour  $\lambda = \frac{2\pi V}{\omega}$ .

$\langle P \rangle$  représente la puissance fournie par les forces de Laplace au cadre.

 On pourra retenir que  $\langle \sin \rangle = \langle \cos \rangle = 0$  et  $\langle \sin^2 \rangle = \langle \cos^2 \rangle = \frac{1}{2}$ .

c) Si  $\lambda > \frac{2\pi V}{\omega}$ , le cadre est propulsé par le champ magnétique puisque  $\langle P \rangle > 0$ , c'est-à-dire qu'il reçoit de la puissance mécanique.

Si  $\lambda < \frac{2\pi V}{\omega}$ , le cadre est freiné par le champ magnétique puisque  $\langle P \rangle < 0$ , c'est-à-dire qu'il fournit de la puissance.

4) Application numérique :  $\langle P \rangle = 178 \text{ kW}$ .

## Exercice 4

1) Le générateur de force électromotrice E engendre un courant dans le circuit fermé formé par la roue et la résistance R.

Ce courant traverse la roue qui est placée dans un champ magnétique. Elle est donc soumise à une force de Laplace qui la met en mouvement.

Il apparaît dans cette roue conductrice en mouvement dans un champ magnétique uniforme un champ électromoteur. La roue est donc le siège d'une force électromotrice induite.

Cette force électromotrice induite doit s'opposer aux causes de l'induction, c'est-à-dire à la force électromotrice E grâce à laquelle la roue est mise en mouvement.

Hidden page



La solution est la somme d'une solution générale de l'équation sans second membre  $\omega_1(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$  et de la solution particulière de l'équation avec second membre  $\omega_2(t) = \frac{Ba^2E}{2RJ} \tau$ .

Le moteur est au repos à l'instant  $t = 0$  donc  $A = -\frac{Ba^2E}{2RJ} \tau$ .

On obtient donc : 
$$\omega(t) = \frac{Ba^2E}{2RJ} \tau (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}).$$

La vitesse de rotation de la roue tend vers une limite finie :

$$\omega_{\text{lim}} = \frac{Ba^2E}{2RJ} \tau = \frac{Ba^2E}{2R} \frac{1}{f + \frac{B^2a^4}{4R}}.$$

La constante de temps  $\tau$  est d'autant plus petite que l'amplitude du champ magnétique est élevée, la vitesse de rotation de la roue tend alors plus rapidement vers la vitesse limite. **Le système réagit ainsi d'autant plus rapidement que le champ magnétique est important.**

## Exercices de niveau 2

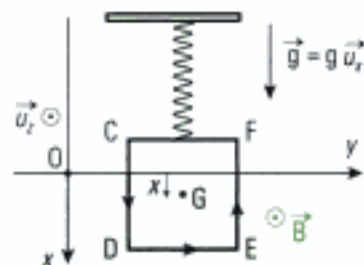
### Exercice 5

1) Le cadre est traversé par un flux magnétique variable, du fait de son mouvement. Il est donc parcouru par un courant induit et soumis à des forces de Laplace.

L'objectif est d'abord de déterminer la force électromotrice  $\varepsilon$  induite dans le cadre puis le courant pour enfin trouver les forces de Laplace.

On met en œuvre la méthode n° 2.

• Le flux du champ magnétique à travers la surface du cadre est  $\Phi = a(x + \frac{a}{2})B$  si on oriente le cadre dans le sens indiqué sur la figure ci-dessous.  $x$  représente la position du centre  $G$  du cadre par rapport à la position d'équilibre.



⚠ On suppose que  $x(t) \in [-\frac{a}{2}; \frac{a}{2}]$  lors de l'évolution du cadre. Cette condition se comprend physiquement : le cadre n'ayant pas d'apport d'énergie et dissipant son énergie potentielle initiale par effet Joule dans sa résistance, il va osciller dans l'intervalle  $x(t) \in [-\frac{a}{2}; \frac{a}{2}]$ .

• On en déduit la force électromotrice  $\varepsilon$  induite dans le cadre :  $\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -aB \frac{dx}{dt}$  dans le sens indiqué sur la figure.

• Le cadre est un circuit fermé et on applique la loi des mailles :  $0 = Ri - \varepsilon$ .

D'où  $i = -\frac{aB}{R} \frac{dx}{dt}$ .

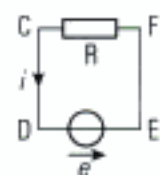
• Le cadre est soumis à la force de Laplace :

$$\vec{F}_L = \int_C^D i(t) d\vec{l} \wedge \vec{B} + \int_D^E i(t) d\vec{l} \wedge \vec{B} + \int_E^F i(t) d\vec{l} \wedge \vec{B}, \text{ avec } \vec{B} = B\vec{u}_z.$$

⚠ On remarque que le segment [CF] du cadre n'est jamais plongé dans le champ  $\vec{B}$ .

$$\vec{F}_L = \int_0^{x+\frac{a}{2}} -iBdx\vec{u}_y + \int_0^a iBdy\vec{u}_x + \int_0^{x+\frac{a}{2}} iBdx\vec{u}_y.$$

$$\text{On en déduit : } \vec{F}_L = iBa\vec{u}_x = -\frac{a^2B^2}{R} \frac{dx}{dt} \vec{u}_x.$$





La force de Laplace vérifie bien la loi de Lenz puisqu'elle s'oppose au mouvement du cadre.

- Le cadre est soumis à son poids  $\vec{P} = mg\vec{u}_x$ , la force de rappel  $\vec{F}_R = -kx\vec{u}_x$  et la force de Laplace  $\vec{F}_L = -\frac{a^2 B^2}{R} \frac{dx}{dt} \vec{u}_x$ .

La deuxième loi de Newton projetée sur l'axe Ox permet d'écrire :

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{a^2 B^2}{R} \frac{dx}{dt} - kx + mg.$$

- 2) L'équation mécanique est alors  $\frac{d^2 x}{dt^2} + 4 \frac{dx}{dt} + 8x = 10$ .

On résout l'équation caractéristique  $r^2 + 4r + 8 = 0$ .

Les solutions sont  $r_1 = -2 + 2j$  et  $r_2 = -2 - 2j$ .

Donc  $x(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$ , ce qui donne en notation réelle :  $x(t) = Ae^{-2t} \cos(2t + \varphi)$ . Il s'agit d'un mouvement pseudo-sinusoidal.

À l'instant  $t = 0$ ,  $x(t = 0) = \frac{a}{2}$  et  $\frac{dx}{dt}(t = 0) = 0$ . On a donc :  $A \cos \varphi = \frac{a}{2}$  et  $-2A \sin \varphi = 0$ .

On en conclut  $\varphi = 0$  et  $A = \frac{a}{2}$ , ce qui donne :  $x(t) = \frac{a}{2} e^{-2t} \cos(2t)$ .

Le cadre oscille autour de sa position d'équilibre et revient avec une constante de temps égale à 0,5 seconde. Au bout de 2,5 secondes, il n'oscille alors quasiment plus et a trouvé sa position stable  $x = 0$ .

## Exercice 6

- 1) La bobine, parcourue par un courant  $i(t)$ , est placée dans le champ magnétique créé par l'aimant.

Elle est donc soumise à une force de Laplace :  $\vec{F} = \int_{\text{bobine}} i(t) d\vec{l} \wedge \vec{B}$ .

La bobine est orientée dans le sens direct, donc, dans une base cylindrique  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ , on a  $d\vec{l} = a d\theta \vec{u}_\theta$ .

Le champ magnétique est radial  $\vec{B} = B\vec{u}_r$ .

D'où  $i(t) d\vec{l} \wedge \vec{B} = -i(t) a B d\theta \vec{u}_z$ .

On en déduit que la force  $\vec{F}$  est dirigé suivant  $\vec{u}_z$ .

- 2) On a  $\vec{F} = \int_A^C i(t) d\vec{l} \wedge \vec{B} = - \int_0^{2N\pi} i(t) a B d\theta \vec{u}_z$ .

Donc :  $\vec{F} = -i(t) 2N\pi a B \vec{u}_z$ .

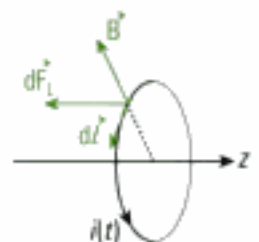
- 3) La force exercée par l'équipage mobile sur la bobine est  $\vec{F}' = -i(t) 2N\pi a B \vec{u}_z$ . Par application de la troisième loi de Newton (ou principe des actions réciproques), la force exercée par la bobine sur l'équipage mobile est donc :  $\vec{F}_b = -\vec{F}' = i(t) 2N\pi a B \vec{u}_z$ .

- 4) L'équipage mobile est soumis à la force exercée par les lames-ressort  $\vec{F}_R = -kz\vec{u}_z$  et à celle exercée par la bobine  $\vec{F}_b$ .

La projection de la deuxième loi de Newton sur l'axe Oz donne l'équation de la mécanique :

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = -kz + i(t) 2N\pi a B. \quad (1)$$

- 5) La bobine est parcourue par un courant variable au cours du temps. Elle est donc soumise à un phénomène d'auto-induction « de Neumann » qui engendre une force électromotrice induite  $e_i(t) = -L \frac{di(t)}{dt}$ .



La bobine est mobile dans un champ magnétique uniforme. Elle est donc soumise à un **phénomène d'induction « de Lorentz »** qui engendre une force électromotrice  $e_2(t) = \int_{\text{bobine}} \vec{E}_m \cdot d\vec{l}$  où  $d\vec{l} = a d\theta \vec{u}_\theta$ .

Or,  $\vec{E}_m = \vec{v} \wedge \vec{B}$  où  $\vec{v} = -\frac{dz(t)}{dt} \vec{u}_z$  est la vitesse de la bobine dans un référentiel lié à l'équipage mobile.

On trouve alors  $e_2(t) = - \int_A^C \frac{dz(t)}{dt} a B d\theta = - \int_0^{2N\pi} \frac{dz(t)}{dt} a B d\theta$ .

D'où :

$$e_2(t) = - 2\pi N a B \frac{dz(t)}{dt}.$$


On retrouve ici la propriété de couplage électromécanique parfait. En effet, la puissance électrique reçue par la bobine due à la force électromotrice d'induction est :  $P_e = e_2(t)i(t) = - 2\pi N a B \frac{dz(t)}{dt} i(t)$  et la puissance mécanique reçue par la bobine due aux forces de Laplace est :  $P_L = \vec{F} \cdot \vec{v} = [- i(t) 2\pi N a B] (- \frac{dz(t)}{dt})$ . On retrouve bien :  $P_L + P_e = 0$ .

6) La bobine est équivalente à l'association série d'une résistance  $R$ , d'une inductance  $L$  et d'une force électromotrice  $e_2$  orientée de A vers C.

On obtient :

$$u_{AC}(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} - e_2(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + 2\pi N a B \frac{dz(t)}{dt}. \quad (2)$$

7) On est en régime sinusoïdal forcé, on travaille donc en complexe.

Les équations (1) et (2) donnent :

$$- m\omega^2 \underline{Z} = - k\underline{Z} + 2N\pi a B \underline{I} \quad \text{et} \quad \underline{U}_s = R\underline{I} + jL\omega \underline{I} + j\omega 2\pi N a B \underline{Z}.$$

On obtient la relation entre  $\underline{Z}$  et  $\underline{U}_s$  par substitution dans les équations précédentes :

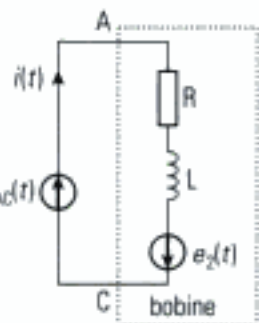
$$\underline{U}_s = (R + jL\omega) \frac{k - m\omega^2}{2N\pi a B} \underline{Z} + j\omega 2\pi N a B \underline{Z}.$$

La fonction de transfert est définie par  $\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{Z}}{\underline{U}_s}$ .

$$\text{On en déduit : } \underline{H}(j\omega) = \frac{2N\pi a B}{Rk} \frac{1}{\left(1 + j \frac{L}{R} \omega\right) \left(1 - \frac{m}{k} \omega^2\right) + j \frac{(2N\pi a B)^2}{Rk} \omega}.$$

$$\text{Ceci donne : } H_0 = \frac{2N\pi a B}{Rk}, \omega_1 = \frac{R}{L}, \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ et } \omega_2 = \frac{Rk}{(2N\pi a B)^2}.$$

8) Application numérique :  $\omega_0 = 45 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ ,  $\omega_1 = 10^4 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$  et  $\omega_2 = 28 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ .



## Exercice 7

1) a) Le plan Oxy est un plan d'anti-symétrie pour les aimants et donc pour le champ magnétique  $\vec{B}$  (voir sur la figure).

De ce fait, en deux points M et N symétriques l'un de l'autre par rapport à ce plan, on a  $B_x(M) = -B_x(N)$  et  $B_z(M) = B_z(N)$ .

Or, M et N ont même abscisse  $x$  et des cotes  $z$  opposées, donc  $B_x(x, z) = -B_x(x, -z)$  et  $B_z(x, z) = B_z(x, -z)$ .

On montre bien que  $B_x(x, z)$  est une fonction impaire en  $z$  et  $B_z(x, z)$  paire en  $z$ .



Hidden page

4) • Le champ électromoteur s'exprime ainsi :

$$\vec{E}_m = \vec{V} \wedge \vec{B} = V \vec{u}_z \wedge [B_x(x, z) \vec{u}_x + B_z(x, z) \vec{u}_z].$$

On trouve :

$$\vec{E}_m = \sum_{n=1}^{+\infty} 2VA_n \operatorname{ch}\left(\frac{2\pi n}{\lambda} x\right) \sin\left(\frac{2\pi n}{\lambda} z\right) \vec{u}_y.$$

• D'après la loi d'Ohm dans le conducteur,  $\vec{j} = \sigma \vec{E}_m$ , on a :

$$\vec{j} = \sum_{n=1}^{+\infty} 2\sigma VA_n \operatorname{ch}\left(\frac{2\pi n}{\lambda} x\right) \sin\left(\frac{2\pi n}{\lambda} z\right) \vec{u}_y.$$

• On en déduit la force volumique de Laplace  $\frac{d\vec{F}_L}{d\tau} = \vec{j} \wedge \vec{B}$ , expression valable si on néglige le champ magnétique induit par la densité de courant.

On a donc :

$$\frac{d\vec{F}_L}{d\tau} = j(x, z) \vec{u}_y \wedge [B_x(x, z) \vec{u}_x + B_z(x, z) \vec{u}_z] = -j(x, z) B_x(x, z) \vec{u}_z + j(x, z) B_z(x, z) \vec{u}_x.$$

On obtient alors :

$$\frac{dF_{Lx}}{d\tau} = \left[ \sum_{n=1}^{+\infty} 2\sigma VA_n \operatorname{ch}\left(\frac{2\pi n}{\lambda} x\right) \sin\left(\frac{2\pi n}{\lambda} z\right) \right] \left[ \sum_{n=1}^{+\infty} 2A_n \operatorname{sh}\left(\frac{2\pi n}{\lambda} x\right) \cos\left(\frac{2\pi n}{\lambda} z\right) \right].$$

$$\frac{dF_{Lx}}{d\tau} = -4\sigma V \left[ \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \operatorname{ch}\left(\frac{2\pi n}{\lambda} x\right) \sin\left(\frac{2\pi n}{\lambda} z\right) \right]^2.$$

5) Pour obtenir  $F_x$  et  $F_z$ , il faut intégrer les expressions précédentes sur le domaine D :

$$\vec{F}_L = \iiint_D \frac{d\vec{F}_L}{d\tau} d\tau \text{ où } d\tau = dx dy dz.$$

On a :

$$F_{Lx} = 4\sigma V \iiint_D \sum_{\substack{1 \leq n \leq \infty \\ 1 \leq n' \leq \infty}} A_n A_{n'} \operatorname{ch}\left(\frac{2\pi n}{\lambda} x\right) \sin\left(\frac{2\pi n}{\lambda} z\right) \operatorname{sh}\left(\frac{2\pi n'}{\lambda} x\right) \cos\left(\frac{2\pi n'}{\lambda} z\right) d\tau.$$

$$F_{Lx} = 4\sigma V l \sum_{\substack{1 \leq n \leq \infty \\ 1 \leq n' \leq \infty}} A_n A_{n'} \int_{-\frac{\lambda}{2}}^{\frac{\lambda}{2}} \sin\left(\frac{2\pi n}{\lambda} z\right) \cos\left(\frac{2\pi n'}{\lambda} z\right) dz \int_{-\frac{\lambda}{2}}^{\frac{\lambda}{2}} \operatorname{ch}\left(\frac{2\pi n}{\lambda} x\right) \operatorname{sh}\left(\frac{2\pi n'}{\lambda} x\right) dx.$$

⚠ On peut intervertir les signes intégrale et somme infinie grâce au théorème de Fubini. On suppose toutes les hypothèses de ce théorème vérifiées.

En se rappelant de la formule de trigonométrie :  $\sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)]$ , on vérifie que toutes les intégrales  $\int_{-\frac{\lambda}{2}}^{\frac{\lambda}{2}} \sin\left(\frac{2\pi n}{\lambda} z\right) \cos\left(\frac{2\pi n'}{\lambda} z\right) dz$  avec  $n \neq n'$  sont nulles, puis celles avec  $n = n'$  aussi. Il vient alors :

$$F_{Lx} = 0.$$

De la même façon, on calcule  $F_{Lz}$  :

$$F_{Lz} = -4\sigma V \iiint_D \sum_{\substack{1 \leq n \leq \infty \\ 1 \leq n' \leq \infty}} A_n A_{n'} \operatorname{ch}\left(\frac{2\pi n}{\lambda} x\right) \sin\left(\frac{2\pi n}{\lambda} z\right) \operatorname{ch}\left(\frac{2\pi n'}{\lambda} x\right) \sin\left(\frac{2\pi n'}{\lambda} z\right) d\tau.$$

$$F_{Lz} = -4\sigma V l \sum_{\substack{1 \leq n \leq \infty \\ 1 \leq n' \leq \infty}} A_n A_{n'} \int_{-\frac{\lambda}{2}}^{\frac{\lambda}{2}} \sin\left(\frac{2\pi n}{\lambda} z\right) \sin\left(\frac{2\pi n'}{\lambda} z\right) dz \int_{-\frac{\lambda}{2}}^{\frac{\lambda}{2}} \operatorname{ch}\left(\frac{2\pi n}{\lambda} x\right) \operatorname{ch}\left(\frac{2\pi n'}{\lambda} x\right) dx.$$

En se rappelant de la formule trigonométrique :  $\sin a \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) - \cos(a+b)]$ , on vérifie que toutes les intégrales  $\int_{-\frac{\lambda}{2}}^{\frac{\lambda}{2}} \sin\left(\frac{2\pi n}{\lambda} z\right) \sin\left(\frac{2\pi n'}{\lambda} z\right) dz$  avec  $n \neq n'$  sont nulles.





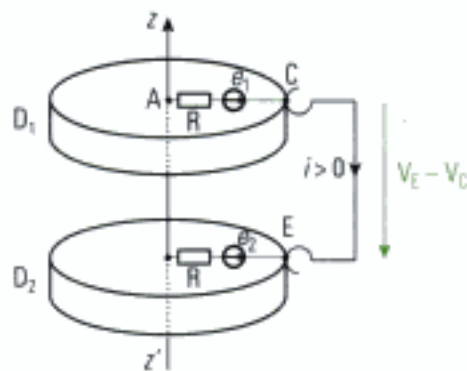
En reprenant le calcul de la question 1) a), on a  $\epsilon_1 = \frac{\omega_0 B a^2}{2}$  pour le disque  $D_1$  orienté de A vers C

et  $\epsilon_2 = \frac{\omega(t) B a^2}{2}$  pour le disque  $D_2$  orienté de A vers E.

On en déduit la force électromotrice  $\epsilon$  induite dans le circuit, en faisant attention de l'orientation de E vers C de celle-ci :

$$\epsilon = \epsilon_1 - \epsilon_2 = \frac{\omega_0 B a^2}{2} - \frac{\omega(t) B a^2}{2}.$$

Donc  $\epsilon = \frac{[\omega_0 - \omega(t)] B a^2}{2}$  si  $\epsilon$  est orienté de E vers C.



b) Les points C et E sont reliés par un fil de résistance négligeable. Donc  $V_E - V_C = 0$ .

Or,  $V_E - V_C = 2Ri - \epsilon$ .

Donc  $i = \frac{[\omega_0 - \omega(t)] B a^2}{4R}$  si  $i$  est orienté de C vers E dans le fil.

c) Le poids est toujours compensé par la réaction de l'axe.

La disque  $D_2$  est parcouru par un courant et placé dans un champ magnétique. De ce fait, les forces qui s'exercent sur le disque  $D_2$  sont les forces de Laplace par rapport à l'axe.

Le moment de la force de Laplace par rapport à l'axe est la somme des moments des forces élémentaires de Laplace appliquées en chaque portion de circuit :

$$M_{x,z}(\vec{F}_L) = \left( \int_{\text{axe}}^E \vec{OM} \wedge d\vec{F}_L(M) \right) \cdot \vec{u}_x,$$

où M est un point du rayon du disque situé à la distance  $r$  de l'axe et  $d\vec{F}_L(M)$  est la force de Laplace exercée sur une élément de longueur  $dl$  placé au point M et orienté dans le sens du courant. Le courant  $i(t)$  est orienté de E vers l'axe donc  $dl = -dr \vec{u}_r = -dr \vec{u}_r$ .

$$d\vec{F}_L(M) = i d\vec{l} \wedge \vec{B} = i B dr \vec{u}_\theta \text{ et } \vec{OM} = r \vec{u}_r.$$

On obtient :

$$M_{x,z}(\vec{F}_L) = \int_0^a r i B dr = \frac{i B a^2}{2}.$$

Ceci donne :

$$M_{x,z}(\vec{F}_L) = \frac{[\omega_0 - \omega(t)] B^2 a^4}{8R}.$$

On remarque que les phénomènes d'induction tendent à uniformiser les vitesses de rotation des deux disques.

Le moment des forces est positif si  $\omega < \omega_0$ , ce qui signifie que le disque  $D_2$  sera entraîné en rotation par le disque  $D_1$  dans le même sens. Ceci est conforme à la loi de Lenz puisqu'il faut accélérer le disque  $D_2$  pour qu'il tourne à la vitesse de rotation  $\omega_0$ .

Le moment des forces est négatif si  $\omega > \omega_0$ , ce qui signifie que le disque  $D_2$  est freiné. Ceci est conforme à la loi de Lenz puisqu'il faut freiner le disque  $D_2$  pour qu'il tourne à la vitesse de rotation  $\omega_0$ .

La loi de Lenz indique bien que les disques ont tendance à tourner dans le même sens à la même vitesse.

d) On applique le théorème du moment cinétique au disque  $D_2$  :

$$J \frac{d\omega(t)}{dt} = \frac{[\omega_0 - \omega(t)] B^2 a^4}{8R}.$$

$\omega(t)$  est donc solution de l'équation différentielle :  $\frac{8JR}{B^2 a^4} \frac{d\omega(t)}{dt} + \omega(t) = \omega_0$ .



On pose  $\tau = \frac{8JR}{B^2 a^4} = \frac{4mR}{B^2 a^2}$ .

La solution est la somme de la solution générale sans second membre  $\omega_1(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$  et d'une solution particulière avec second membre  $\omega_2(t) = \omega_0$ .

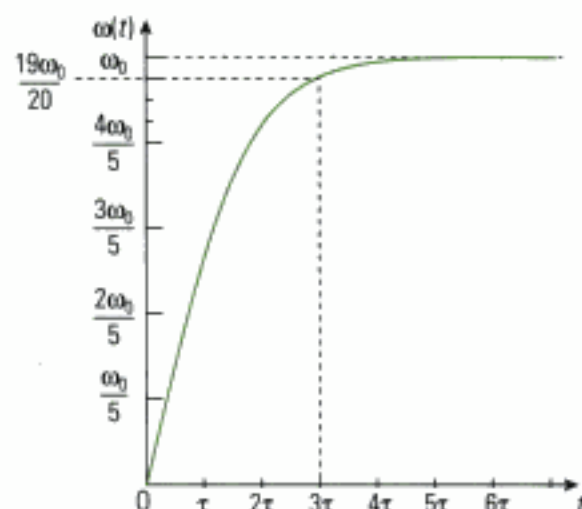
Le disque est au repos à l'instant  $t = 0$

donc  $A = -\omega_0$ .

On obtient donc

$$\omega(t) = \omega_0(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}).$$

Le graphe donne :



## Exercice 9

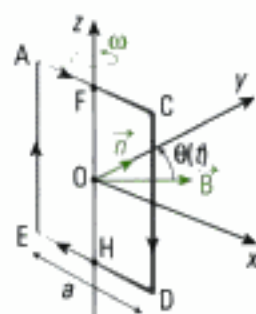
1) a) On met en œuvre la méthode n° 1.

• Il faut d'abord déterminer le champ électromoteur  $\vec{E}_m$  en tout point du cadre.

Le point M est un point quelconque du cadre que l'on a placé au hasard sur la figure suivante.

On travaille dans le repère donné en énoncé Oxyz de vecteur de base  $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ .

Le champ magnétique a pour expression  $\vec{B} = B(\sin\theta \vec{u}_x + \cos\theta \vec{u}_y)$  avec  $\theta(t) = \omega t$  car, à l'instant initial, le champ magnétique  $\vec{B}$  est parallèle à la normale du cadre :  $\vec{u}_z$ .



• Si M se trouve sur les branches AF ou EH à la distance  $r$  de l'axe, le champ électromoteur est  $\vec{E}_{m1} = \vec{v} \wedge \vec{B} = -v\vec{u}_y \wedge B(\sin\omega t \vec{u}_x + \cos\omega t \vec{u}_y) = vB\sin\omega t \vec{u}_z$  où  $\vec{v} = -r\omega \vec{u}_y$  est la vitesse du point considéré.

• Si M se trouve sur les branches FC ou HD à la distance  $r$  de l'axe, le champ électromoteur est  $\vec{E}_{m2} = \vec{v} \wedge \vec{B} = v\vec{u}_y \wedge B(\sin\omega t \vec{u}_x + \cos\omega t \vec{u}_y) = -vB\sin\omega t \vec{u}_z$  où  $\vec{v} = r\omega \vec{u}_y$  est la vitesse du point considéré.

• Si M se trouve sur la branche CD à la distance  $\frac{a}{2}$  de l'axe, le champ électromoteur est  $\vec{E}_{m3} = \vec{v} \wedge \vec{B} = v\vec{u}_z \wedge B(\sin\omega t \vec{u}_x + \cos\omega t \vec{u}_y) = -vB\sin\omega t \vec{u}_x$  où  $\vec{v} = \frac{a}{2} \omega \vec{u}_y$  est la vitesse du point considéré.

• Si M se trouve sur la branche EA à la distance  $\frac{a}{2}$  de l'axe, le champ électromoteur est  $\vec{E}_{m4} = \vec{v} \wedge \vec{B} = -v\vec{u}_z \wedge B(\sin\omega t \vec{u}_x + \cos\omega t \vec{u}_y) = vB\sin\omega t \vec{u}_x$  où  $\vec{v} = -\frac{a}{2} \omega \vec{u}_y$  est la vitesse du point considéré.

Par définition,  $\epsilon = \oint_{ACDE} \vec{E}_m \cdot d\vec{l}$ . L'intégration se fait dans le sens ACDE du fait de l'orientation de la normale.

$$\text{On a donc : } \epsilon = \int_A^F \vec{E}_{m1} \cdot d\vec{l} + \int_F^C \vec{E}_{m2} \cdot d\vec{l} + \int_C^D \vec{E}_{m3} \cdot d\vec{l} + \int_D^H \vec{E}_{m2} \cdot d\vec{l} + \int_H^E \vec{E}_{m1} \cdot d\vec{l} + \int_E^A \vec{E}_{m4} \cdot d\vec{l}.$$

Or,

> sur les portions AC et ED, l'élément de longueur  $d\vec{l}$  est dirigé selon  $\vec{u}_x$  et le champ électromoteur selon  $\vec{u}_z$ . La circulation de  $\vec{E}_m$  sur AC et ED est donc nulle.

> sur la portion CD, on a  $d\vec{l} = -dz \vec{u}_z$  soit, en tout point,  $\vec{E}_{m3} \cdot d\vec{l} = \frac{a}{2} \omega B \sin\omega t dz$ .

Hidden page



D'où :

$$\begin{aligned}
 & \bullet \int_A^F iB \cos \omega t \, r \, dr \, \vec{u}_y = \int_0^{\frac{a}{2}} iB \cos \omega t \, r \, dr \, \vec{u}_y = iB \frac{a^2}{8} \cos \omega t \, \vec{u}_y \\
 & \bullet \int_F^C -iB \cos \omega t \, r \, dr \, \vec{u}_y = \int_0^{\frac{a}{2}} -iB \cos \omega t \, r \, dr \, \vec{u}_y = -iB \frac{a^2}{8} \cos \omega t \, \vec{u}_y \\
 & \bullet \int_D^H iB \cos \omega t \, r \, dr \, \vec{u}_y = \int_0^{\frac{a}{2}} iB \cos \omega t \, r \, dr \, \vec{u}_y = iB \frac{a^2}{8} \cos \omega t \, \vec{u}_y \\
 & \bullet \int_H^E -iB \cos \omega t \, r \, dr \, \vec{u}_y = \int_0^{\frac{a}{2}} -iB \cos \omega t \, r \, dr \, \vec{u}_y = -iB \frac{a^2}{8} \cos \omega t \, \vec{u}_y \\
 & \bullet \int_C^D -iB \frac{a}{2} \sin \omega t \, dz \, \vec{u}_z = \int_0^a -iB \frac{a}{2} \sin \omega t \, dz \, \vec{u}_z = -iB \frac{a^2}{2} \sin \omega t \, \vec{u}_z \\
 & \bullet \int_E^A -iB \frac{a}{2} \sin \omega t \, dz \, \vec{u}_z = \int_0^a -iB \frac{a}{2} \sin \omega t \, dz \, \vec{u}_z = -iB \frac{a^2}{2} \sin \omega t \, \vec{u}_z
 \end{aligned}$$

On obtient  $\vec{M}_O(\vec{F}_L) = -iBa^2 \sin \omega t \, \vec{u}_z$ .

Ceci donne :  $\vec{M}_O(\vec{F}_L) = -\frac{B^2 a^4 \omega}{4R} \sin^2 \omega t \, \vec{u}_z$ .

d) La puissance moyenne fournie au cadre est :  $\langle P_L \rangle = \langle \vec{M}_O(\vec{F}_L) \cdot \vec{\omega} \rangle$ .

La valeur moyenne est  $\langle P_L \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T -\frac{B^2 a^4 \omega^2}{4R} \sin^2 \omega t \, dt = -\frac{B^2 a^4 \omega^2}{4R} \langle \sin^2 \omega t \rangle$ .

☀ Le calcul de  $\langle P_L \rangle$  revient au calcul de  $\langle \sin^2 \omega t \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \sin^2 \omega t \, dt$  où  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ .

$$\text{Or, } \frac{1}{T} \int_0^T \sin^2(\omega t + \varphi) \, dt = \frac{1}{T} \int_0^T \left( \frac{1 - \cos(2\omega t + \varphi)}{2} \right) dt = \frac{1}{2} - \frac{1}{4T\omega} [\sin(\omega t + \varphi)]_0^T = \frac{1}{2}.$$

On peut appliquer directement les résultats  $\langle \sin^2 \omega t \rangle = \frac{1}{2}$ ,  $\langle \cos^2 \omega t \rangle = \frac{1}{2}$ ,  $\langle \sin \omega t \rangle = 0$  et  $\langle \cos \omega t \rangle = 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ .

D'où :  $\langle P_L \rangle = -\frac{B^2 a^4 \omega^2}{8R}$ .

Cette puissance est négative. Ceci est en accord avec la loi de Lenz puisque la force de Laplace (effet de l'induction) s'oppose au mouvement du cadre (cause de l'induction).

☀ Cette puissance a même valeur que la puissance dissipée par effet Joule. Ceci s'explique car l'induction réalise un couplage électromécanique tel que la puissance mécanique est fournie au cadre et transformée en puissance électrique. Le cadre la dissipe sous forme thermique (effet Joule).

e) Le moteur doit fournir une puissance qui compense les pertes (effet Joule).

On a donc :  $\langle P \rangle = \frac{B^2 a^4 \omega^2}{8R}$ .

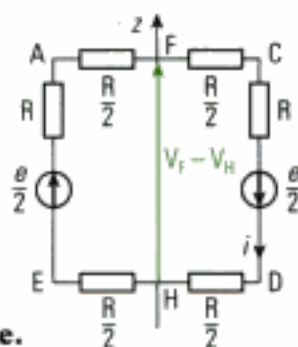
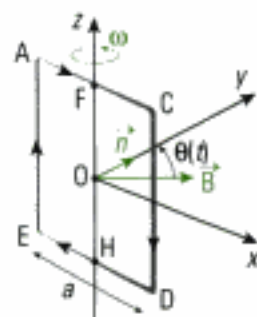
Application numérique :  $\langle P \rangle = 0,16 \, \text{pW}$ .

3) a) L'impédance du voltmètre est « grande » de manière à considérer que celui-ci ne perturbe pas le montage.

On a :  $V_F - V_H = 2Ri - \frac{e}{2}$  si on suppose qu'il n'y a pas d'induction dans les fils du voltmètre. En appliquant la loi des mailles sur le circuit entier, on a :  $0 = 4Ri - e$ .

On trouve alors évidemment  $V_F - V_H = 0$ .

**La mesure du champ magnétique est impossible par cette méthode.**



b) La nouvelle équation électrique du montage devient  $0 = (4R + R')i - e$ .

On en déduit :

$$i' = \frac{Ba^2\omega}{4R + R'} \sin\omega t.$$

**La mesure de la valeur efficace du courant permet de déterminer le champ magnétique si on connaît  $a$  et  $\omega$ .**

Dans le cas de l'énoncé, on obtient  $I_{eff} = 71$  nA. Ce courant est difficile à mesurer. Il faudrait augmenter le nombre de spires pour améliorer le système.

## Exercice 10

1) Le haut-parleur est un système à symétrie cylindrique. On utilise les coordonnées cylindriques d'axe  $Ox$  et de base  $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\phi, \vec{u}_z)$ .

• Les forces qui s'exercent sur la membrane sont :

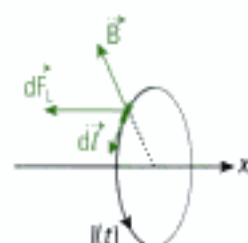
> Force de rappel :  $\vec{F}_R = -kx\vec{u}_x$ .

> Force de frottement fluide qui modélise les interactions avec l'air :  $\vec{F}_f = -f \frac{dx}{dt} \vec{u}_x$ .

> Force de Laplace exercée sur la bobine parcourue par un courant  $I(t)$  et placée dans un champ magnétique radial  $\vec{B} = B\vec{u}_\rho$  :

$$\vec{F}_L = \int_{\text{bobine}} I(t) d\vec{l} \wedge \vec{B}.$$

⚠ Il faut ici supposer un sens de parcourt pour le courant. On le prend suivant  $\vec{u}_\phi$  de sorte que la normale à chaque spire est bien  $\vec{u}_z$ .



La longueur de fil de la bobine est  $l$ . La force de Laplace est la somme des forces exercées sur chaque élément de longueur de la bobine  $d\vec{l} = dl\vec{u}_\phi$ .

D'où :  $\vec{F}_L = \int_0^l I(t) B dl \vec{u}_\phi \wedge \vec{u}_\rho = -I(t) B l \vec{u}_x$ .

> Le poids de la membrane qui est compensé par la réaction du baffle.

• On applique la deuxième loi de Newton à la membrane de masse  $m$  et de vitesse  $\vec{v} = \frac{dx}{dt} \vec{u}_x$  que l'on projette sur l'axe  $Ox$  :

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx - f \frac{dx}{dt} - I(t) B l. \quad (1)$$

2) La force électromotrice induite dans la bobine du fait de son mouvement est égale à la circulation du champ électromoteur de Lorentz sur la bobine.

• Le champ électromoteur est défini par  $\vec{E}_m = \vec{v} \wedge \vec{B} = v B \vec{u}_\phi \wedge \vec{u}_\rho = v B \vec{u}_z$ .

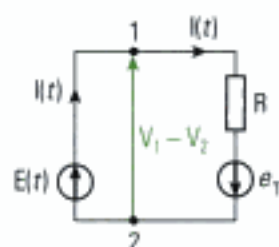
• La force électromotrice est  $e = \int_0^l \vec{E}_m \cdot d\vec{l} = \int_0^l v B dl = v B l$ .

Il faut aussi tenir compte de l'auto-induction qui est modélisé par la force électromotrice  $e' = -L \frac{dI(t)}{dt}$ .

La force électromotrice totale dans la bobine est donc :  $e_T = v B l - L \frac{dI(t)}{dt}$ .

La différence de potentiel aux bornes de la bobine est  $V_1 - V_2 = RI(t) - e_T$  en convention récepteur. Cette différence de potentiel est égale à la tension à ses bornes  $E(t)$  dans le même sens que  $I(t)$  puisqu'il s'agit du générateur qui fournit ce courant que l'on considère donc en convention générateur.

On en déduit :  $E(t) = RI(t) - v B l + L \frac{dI(t)}{dt}$  (2) où  $v = \frac{dx}{dt}$ .



3) On est en régime sinusoïdal forcé, on travaille donc en complexe.

Soient  $\underline{E}(t) = \underline{E}e^{j\omega t}$ ,  $\underline{I}(t) = \underline{I}e^{j\omega t}$ , et  $\underline{X}(t) = \underline{X}e^{j\omega t}$ .

Les équations (1) et (2) donnent :

$$-m\omega^2 \underline{X} = -k\underline{X} - jf\omega \underline{X} - B\underline{I} \quad \text{et} \quad \underline{E} = R\underline{I} - jB\omega \underline{X} + jL\omega \underline{I}.$$

On obtient la relation entre  $\underline{E}$  et  $\underline{I}$  par substitution dans les équations précédentes :

$$\underline{E} = R\underline{I} + \frac{jB^2 l^2 \omega}{k + jf\omega - m\omega^2} \underline{I} + jL\omega \underline{I}.$$

L'impédance complexe est  $\underline{Z} = \frac{\underline{E}}{\underline{I}}$ .

D'où :

$$\underline{Z} = \underbrace{R + jL\omega}_{\text{impédance classique}} + \underbrace{\frac{jB^2 l^2 \omega}{k + jf\omega - m\omega^2}}_{\text{impédance due au phénomène d'induction}}.$$

$$4) \text{ On a } \underline{Z} = R + jL\omega + \frac{jB^2 l^2 \omega}{k + jf\omega - m\omega^2} = R + jL\omega + \frac{\frac{B^2 l^2}{f}}{1 + \frac{k - m\omega^2}{jf\omega}} = R + jL\omega + \frac{b}{1 - ja(\omega)}.$$

$$\text{D'où : } \underline{Z} = R + jL\omega + \frac{b}{1 + [a(\omega)]^2} + j \frac{ba(\omega)}{1 + [a(\omega)]^2}.$$

$$\text{On en déduit : } R' = \frac{b}{1 + [a(\omega)]^2} \quad \text{et} \quad L' = \frac{ba(\omega)}{(1 + [a(\omega)]^2)\omega}.$$

• La dimension du produit  $\frac{k}{\omega}$  est celle de où  $kx \frac{1}{\omega x}$  est homogène à une force.  $\frac{k}{\omega}$  s'exprime donc en  $N \cdot s \cdot m^{-1}$  et  $f$  s'exprime en  $N \cdot s \cdot m^{-1}$ . Donc  $a(\omega)$  est sans dimension.

• La force de Laplace est le produit du champ magnétique par une longueur et un courant. Donc le produit  $B l$  s'exprime en  $N \cdot A^{-1}$ . De plus, la force électromotrice induite est le produit du champ magnétique par une longueur et une vitesse. Donc le produit  $B l$  s'exprime en  $V \cdot s \cdot m^{-1}$ .

$\frac{B^2 l^2}{f}$  s'exprime en  $V \cdot A^{-1}$  et  $b$  est donc équivalent à une impédance.  **$b$  s'exprime alors en Ohm.**

## Exercice 11

1) La bobine plate se déplace à l'extérieur du solénoïde où le champ magnétique  $\vec{B}$  n'est pas uniforme. Les variations de ce champ magnétique en fonction de la position de la bobine explique les variations temporelles du champ  $B$  au niveau de la bobine plate en mouvement.

Du point de vue de la bobine plate, elle est placée dans un champ variable au cours du temps qui engendre un phénomène d'induction. La bobine étant court-circuitée, il y a apparition d'un courant induit que l'on représente par  $i_2(t)$  sur la figure de l'énoncé.

2) a) On met en œuvre la méthode n° 2.

Le flux du champ magnétique à travers la surface de la bobine plate est  $\Phi = N \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$  où  $d\vec{S} = dS \vec{u}_z$  si on oriente la bobine dans le sens indiqué par le courant  $i_2(t)$ .

$$\Phi = NB(z)\pi r^2 = N \frac{\mu_0 n i_1(t)}{2} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}}\right) \pi r^2 = M(z) i_1(t).$$

$$\text{On obtient alors : } M(z) = N \frac{\mu_0 n}{2} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}}\right) \pi r^2.$$



Hidden page

D'où :

$$0 = R_2 i_2(t) + L_2 \frac{di_2(t)}{dt} + M(z) \frac{di_1(t)}{dt}.$$

c) Le solénoïde est alimenté par un signal sinusoïdal. On peut donc travailler en notation complexe.

Soient  $\underline{V}(t) = \underline{V}e^{j\omega t}$ ,  $i_1(t) = i_1 e^{j\omega t}$ ,  $i_2(t) = i_2 e^{j\omega t}$ .

On obtient alors :

$$\underline{V} = (R_1 + jL_1\omega)i_1 + jM(z)\omega i_2 \quad \text{et} \quad 0 = (R_2 + jL_2\omega)i_2 + jM(z)\omega i_1.$$

On trouve :

$$i_1 = \frac{R_2 + jL_2\omega}{(R_1 + jL_1\omega)(R_2 + jL_2\omega) + [M(z)\omega]^2} \underline{V} \quad \text{et} \quad i_2 = \frac{jM(z)\omega}{(R_1 + jL_1\omega)(R_2 + jL_2\omega) + [M(z)\omega]^2} \underline{V}.$$

d) D'après la question 4, on a :  $\langle \vec{F}_L \rangle = \langle i_1(t)i_2(t) \rangle \frac{dM(z)}{dz} \vec{u}_z$ .

Avec les données de l'énoncé, on obtient :

$$i_1(t)i_2(t) = 10,4 \cos(\omega t - 1,39) \cos(\omega t - 3,07) = 5,2 [\cos(2\omega t - 4,46) + \cos(1,68)].$$

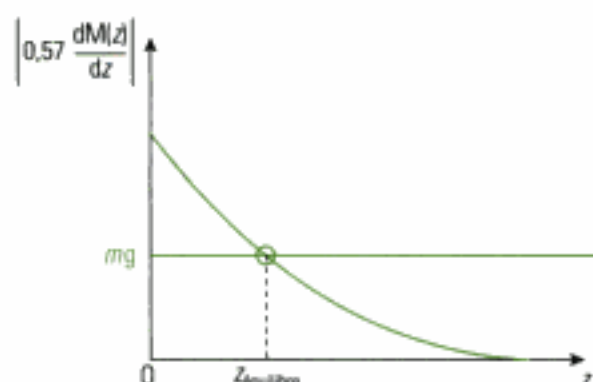
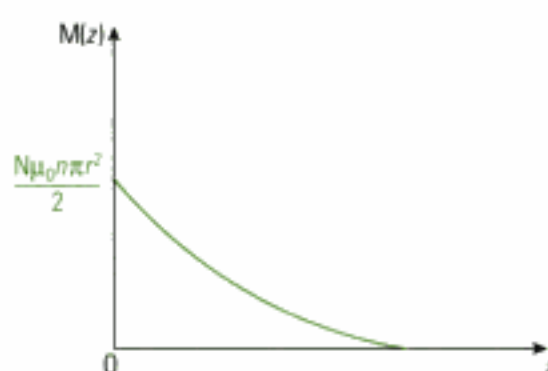
On se rappelle de la formule trigonométrique :  $\cos p \cos q = \frac{1}{2} [\cos(p+q) + \cos(p-q)]$ .

D'où  $i_1(t)i_2(t) = -0,57 + 5,2 \cos(2\omega t - 4,46)$  et  $\langle i_1(t)i_2(t) \rangle = -0,57$ .

On en conclut  $\langle \vec{F}_L \rangle = -0,57 \frac{dM(z)}{dz} \vec{u}_z$ .

Or,  $\frac{dM(z)}{dz} < 0$ . On obtient donc une force moyenne qui a tendance à propulser la bobine vers le haut.

L'équilibre sera obtenu lorsque cette force compense le poids.



# Propagation et rayonnement

## Introduction

L'étude des phénomènes de propagation et de rayonnement des ondes électromagnétiques sera effectuée dans le vide. On interprétera le comportement des champs en régime variable comme une propagation, le but du chapitre étant de donner un sens physique aux résultats mathématiques mis en évidence.

L'équation de d'Alembert constitue l'équation de propagation des champs. Les solutions de cette équation modélisent des ondes observables : les ondes progressives et les ondes stationnaires.

On s'intéressera à l'onde plane progressive harmonique (OPPH) comme une composante universelle de toute onde.

On étudiera ensuite la dispersion à travers les exemples d'une onde guidée par deux plans ou d'une onde qui se propage dans un plasma, puis la réflexion sur un conducteur parfait en montrant l'existence d'ondes stationnaires dans la réalité.

Enfin, on verra le dipôle rayonnant comme modèle concret d'une antenne.

### Plan du chapitre

A. Équations locales de l'électromagnétisme.....	200
B. Solutions et interprétation.....	201
C. Onde plane progressive harmonique (OPPH).....	205
D. Polarisation de l'OPPH .....	207
E. Dispersion.....	209
F. Propagation d'une OPPH dans un plasma.....	213
G. Propagation d'une onde entre deux plans conducteurs.....	217
H. Rayonnement d'un dipôle oscillant.....	219
I. Réflexion d'une OPPH sur un conducteur .....	223
<b>Méthodes</b>	
L'essentiel ; mise en œuvre .....	226
<b>Énoncés des exercices</b> .....	234
<b>Indications</b> .....	239
<b>Solutions des exercices</b> .....	240



Hidden page

### Propriété 1

L'équation aux dérivées partielles satisfaite par le champ électrique  $\vec{E}$  est une **équation dite de d'Alembert** :

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}.$$

On parle d'**équation de propagation du champ** et la constante  $c$  est la **vitesse de la lumière dans le vide**, appelée aussi **célérité**.

1. L'opérateur d'Alembertien est défini par :  $\square = \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$ .

On voit alors que

$\vec{E}$  vérifie :  $\square \vec{E} = \vec{0}$ .

Procédons de manière analogue pour le champ magnétique  $\vec{B}$ .

On part de l'équation :  $\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}}\vec{B}) = \vec{\text{grad}}(\text{div}\vec{B}) - \Delta \vec{B}$ .

Comme  $\text{div}\vec{B} = 0$  et  $\vec{\text{rot}}\vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ , l'équation devient :

$$\vec{\text{rot}} \left( \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = -\Delta \vec{B}, \text{ soit } \Delta \vec{B} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\text{rot}}\vec{E}) = \vec{0}.$$

Avec  $\vec{\text{rot}}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ , il vient alors :

### Propriété 2

Le champ magnétique  $\vec{B}$  satisfait l'**équation de d'Alembert** :

$$\Delta \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}.$$

2. On voit de la même manière que

$\vec{B}$  vérifie :  $\square \vec{B} = \vec{0}$ .

## B. Solutions et interprétation

On recherche des solutions de cette équation, en sachant bien qu'il est impossible de trouver analytiquement toutes les solutions. Pour simplifier le calcul, on se place dans le cas où le champ ne dépend que d'une variable cartésienne d'espace,  $x$  par exemple, et du temps  $t$ . Les deux champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  étant solution de la même équation, on ne parlera dans ce paragraphe que du champ électrique.

L'équation de propagation prend donc la forme suivante :

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}.$$

### B.1. Solution à variables liées : ondes progressives

On projette cette équation sur la droite qui porte le champ  $\vec{E}$  et on pose :

$$E = f\left(t - \frac{x}{c}\right) \text{ soit } E = f(u) \text{ avec } u = t - \frac{x}{c}.$$

On parle de solution à variables liées, car la fonction définissant le champ dépend de la seule variable  $u$ , laquelle contient les deux variables  $x$  et  $t$  qui sont liées dans l'expression de  $u$ .

Dérivons le champ électrique :

$$\frac{\partial E}{\partial x} = \frac{\partial E}{\partial u} \times \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{c} f'(u), \text{ puis}$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial E}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial u} \left( -\frac{1}{c} f'(u) \right) \times \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{c^2} f''(u).$$

$$\text{De même, } \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\partial E}{\partial u} \times \frac{\partial u}{\partial t} = f'(u), \text{ puis}$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial E}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial u} \left( f'(u) \right) \times \frac{\partial u}{\partial t} = f''(u).$$

On s'aperçoit alors que  $\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} f''(u) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$ . L'équation de d'Alembert

est ainsi vérifiée par un champ de la forme  $E = f(u) = f\left(t - \frac{x}{c}\right)$ .

On peut vérifier de même que le champ  $E = g(v) = g\left(t + \frac{x}{c}\right)$  est aussi solution de l'équation de d'Alembert.<sup>1</sup>

1. Ces deux résultats peuvent être trouvés simultanément en effectuant le changement de variables

$$(x, t) \rightarrow (u, v) = \left(t - \frac{x}{c}, t + \frac{x}{c}\right).$$

On démontrerait alors que la solution de l'équation différentielle

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0, \text{ s'écrit}$$

$E = f(u) + g(v)$ , mais ce type de calcul n'est plus au programme.

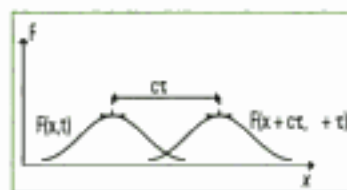


Fig. 1 - Onde progressive. Soit  $F(x, t) = f(x - ct)$ . On voit que l'onde présente en  $x$  à l'instant  $t$  est présente en  $x + ct$  à l'instant  $t + \tau$ .

2. Ici, il s'agit du champ électromagnétique.

3. On se déplace.

4. On peut remarquer qu'une invariance par translation dans deux directions n'a pas de sens physique. Cela signifierait que les sources de champ sont elles aussi invariantes, donc de dimensions infinies.

5. Elle apparaît comme une onde plane vis-à-vis des dimensions du capteur qui la traite.

6. Voir §H, rayonnement d'un dipôle oscillant.

## B.2. Interprétation physique

• Considérons par exemple la solution  $E = f(u) = f\left(t - \frac{x}{c}\right)$ .

Pour savoir comment évolue le champ dans le temps et l'espace, suivons une valeur fixée de ce champ.

Cela revient à prendre  $u = t - \frac{x}{c}$  constant. Différencions cette expression :  $du = dt - \frac{dx}{c} = 0$ , car  $u$  est fixé, d'où  $\frac{dx}{dt} = c$ .

Pour suivre un état de champ donné, il faut donc se déplacer (avec lui) le long de l'axe  $x$  avec la vitesse  $c$  dans le sens positif de l'axe (fig. 1).

On peut montrer de manière analogue que la solution  $E = g(v) = g\left(t + \frac{x}{c}\right)$  correspond à un champ qui se déplace sans déformation à la vitesse  $c$  dans le sens négatif de l'axe  $x$ .

On parle d'**onde progressive**, car la grandeur<sup>2</sup> progresse<sup>1</sup> à la vitesse  $c$ .

• À un instant  $t$  donné, l'état du champ reste le même dans tout le plan  $x = Cste$  :  $x$  et  $t$  sont alors fixés et de ce fait  $f(u) = f\left(t - \frac{x}{c}\right)$  et  $g(v) = g\left(t + \frac{x}{c}\right)$  aussi.

On parle d'**onde plane** pour caractériser une onde telle que la grandeur concernée a même valeur en tout point d'un plan d'onde  $x = Cste$ , plan qui est perpendiculaire à la direction de propagation.

### Definition 1

La solution de l'équation de d'Alembert du type

$$f(u) + g(v) = f\left(t - \frac{x}{c}\right) + g\left(t + \frac{x}{c}\right),$$

est un **onde plane progressive**.

On parle d'**onde progressive** pour spécifier qu'elle se déplace sans déformation à la vitesse  $c$  dans la direction de l'axe  $x$ .

On parle d'**onde plane** pour préciser que la grandeur qui se déplace est inchangée pour les points d'un plan d'onde  $x = Cste$ .<sup>3</sup>

Ce modèle n'est donc pas réaliste, mais on constate que, loin des sources, l'onde possède localement la structure d'une onde plane.<sup>5</sup> Le modèle idéal (et simple) de l'onde plane peut alors être utilisé sans introduire d'erreur notable.<sup>6</sup>



Hidden page

Hidden page

# C. Onde plane progressive harmonique (OPPH)

## C.1. Définition

Le champ d'une onde plane progressive prend la forme suivante :

$$E(x,t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right) + g\left(t + \frac{x}{c}\right).$$

La fonction  $f$  correspond à un champ électrique qui se propage sans déformation dans la direction et le sens de l'axe  $x'x$ , la fonction  $g$  à un champ qui se propage dans la direction de l'axe  $x'x$ , mais dans le sens opposé.

Considérons l'une de ces deux ondes, par exemple celle qui se propage dans la direction et le sens de l'axe  $x'x$ . La fonction  $f$  est *a priori* quelconque. Si  $f$  est sinusoïdale, alors on parle d'onde harmonique.<sup>1</sup>

1. ou sinusoïdale, ou monochromatique.

### Définition 3

Le champ d'une onde plane progressive harmonique (OPPH) est de la forme :

$$E(x,t) = E_0 \cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{c}\right) + \varphi\right) = E_0 \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c}x + \varphi\right).$$

## C.2. Universalité de l'OPPH

• L'étude des seules OPPH peut sembler restrictive et absolument idéaliste. Il n'en est rien, car si on comprend le comportement d'une OPPH, on peut alors expliquer celui de la quasi-totalité des ondes électromagnétiques, qu'elles soient planes ou non, périodiques ou non.

En effet, on utilise la linéarité des équations de Maxwell. On sait qu'une OPPH étant solution de l'équation de d'Alembert, la superposition de plusieurs OPPH l'est aussi.

Ainsi, la série de Fourier construite à partir d'une OPPH du type

$$E(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} E_{0n} \cos\left(n\omega\left(t - \frac{x}{c}\right) + \varphi_n\right)$$

est solution de l'équation de d'Alembert. C'est le champ d'une onde périodique, mais non sinusoïdale. Tout signal périodique est décomposable en série de Fourier et peut donc s'exprimer comme une somme d'OPPH.

• De même, si une onde est constituée par un signal non périodique, alors on peut en prendre la transformée de Fourier, laquelle s'interprète comme la somme continue d'OPPH.<sup>2</sup>

2. On somme alors de proche en proche des OPPH infiniment voisines les unes des autres :

$$E(x,t) = \int f(\omega) \cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{c}\right) + \varphi_\omega\right) d\omega$$

• Lorsqu'une onde n'est pas plane, on admet qu'on peut l'exprimer en tout point comme la somme de plusieurs ondes planes se propageant dans des directions différentes.

Si  $\vec{u}$  est le vecteur unitaire qui donne la direction et le sens de la propagation, alors on peut écrire en tout point  $M$  où passe l'onde :

$$t - \frac{x}{c} = t - \frac{\vec{u} \cdot \vec{OM}}{c} = t - \frac{\vec{u} \cdot \vec{r}}{c} \text{ avec } \vec{r} = \vec{OM}.$$

Ainsi, si l'onde qui passe par  $M$  n'est pas plane, on exprime son champ sous la forme :

$$E(x,t) = \sum_{\vec{u}} E_{0,\vec{u}} \cos\left(\omega\left(t - \frac{\vec{u} \cdot \vec{r}}{c}\right) + \varphi_{\vec{u}}\right).$$

Pour tout vecteur  $\vec{u}$ , le champ considéré  $E_{0,\vec{u}} \cos\left(\omega\left(t - \frac{\vec{u} \cdot \vec{r}}{c}\right) + \varphi_{\vec{u}}\right)$  est solution de l'équation de d'Alembert, et la somme de même, car l'équation de propagation est linéaire.



1. Le cas où sa direction change est étudié dans le prochain paragraphe Polarisation de l'OPPH.

### C.3. Vecteur d'onde, longueur d'onde

On suppose dans ce paragraphe que le champ électrique de l'onde garde une direction de propagation fixe.<sup>1</sup>

On suppose que l'OPPH se propage dans la direction et le sens du vecteur  $\vec{u}$ . Son expression est donnée par :

$$\vec{E}(M, t) = \vec{E}_0 \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c} \vec{u} \cdot \vec{r} + \varphi\right) = \vec{E}_0 \cos\left(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi\right), \text{ où :}$$

**Définition 4**

$\vec{k} = \frac{\omega}{c} \vec{u}$  définit le **vecteur d'onde** de l'OPPH.

Le **nombre d'onde** est le module  $k = ||\vec{k}|| = \frac{\omega}{c}$  du vecteur d'onde.

Le champ de l'onde s'écrit alors :  $\vec{E}(M, t) = \vec{E}_0 \cos\left(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi\right)$ .

La longueur d'onde  $\lambda$  est la « période spatiale » de l'OPPH telle que :

$$\vec{E}(x + \lambda, t) = \vec{E}(x, t), \text{ soit } E_0 \cos(\omega t - kx + \varphi) = E_0 \cos(\omega t - k(x + \lambda) + \varphi).$$

D'où  $k\lambda = 2\pi$  et :

**Définition 5**

La **longueur d'onde**  $\lambda$  est la « période spatiale » du champ. Elle est définie par la relation :  $k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$ .

### C.4. Structure de l'OPPH

Le champ électrique de l'OPPH s'écrit :

$$\vec{E}(M, t) = \vec{E}_0 \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c} \vec{u} \cdot \vec{OM} + \varphi\right) = \vec{E}_0 \cos\left(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi\right).$$

On va introduire l'expression du champ dans les équations de Maxwell.

Pour s'affranchir des dérivées temporelles ou spatiales, on utilise la notation complexe. On prend le complexe dont la partie réelle est le champ de l'onde considérée.

Le champ complexe d'une OPPH s'écrit :

$$\vec{E}(x, t) = \vec{E}_0 e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM} + \varphi)} = \vec{E}_0 e^{j(\omega t - xk_x - yk_y - zk_z + \varphi)},$$

où  $\vec{k} = \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{pmatrix}$ , avec  $||\vec{k}|| = \frac{\omega}{c} = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}$ .

2. On souligne le champ lorsque celui-ci est écrit en notation complexe. On peut aussi écrire

$$\vec{E}(x, t) = \vec{E}_0 e^{j\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM}},$$

avec  $\vec{E}_0 = \vec{E}_0 e^{j\varphi}$ .

Avec cette notation, les dérivées sont des produits par des constantes :

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = j\omega \vec{E}_0 e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM} + \varphi)} = j\omega \vec{E}, \text{ soit}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \times j\omega.$$

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial x} = -jk_x \vec{E}, \text{ soit } \frac{\partial}{\partial x} \rightarrow \times -jk_x,$$

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial y} = -jk_y \vec{E}, \text{ soit } \frac{\partial}{\partial y} \rightarrow \times -jk_y,$$

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial z} = -jk_z \vec{E}, \text{ soit } \frac{\partial}{\partial z} \rightarrow \times -jk_z.$$

Ainsi, l'opérateur Nabla devient un vecteur constant :

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -jk_x \\ -jk_y \\ -jk_z \end{pmatrix} = -j\vec{k}$$

Les opérateurs d'analyse vectorielle rotationnel ou divergence s'écrivent alors comme de simples produits vectoriel ou scalaire :

$$\begin{aligned} \text{div} \vec{E} &= \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -j\vec{k} \cdot \vec{E} \\ \text{rot} \vec{E} &= \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -j\vec{k} \wedge \vec{E} \end{aligned}$$

Les équations de Maxwell peuvent donc être réécrites pour des OPPH en notation complexe :

Maxwell-flux :  $\text{div} \vec{B} = 0$  devient  $\vec{k} \cdot \vec{B} = 0$ .

Maxwell-Gauss :  $\text{div} \vec{E} = 0$  devient  $\vec{k} \cdot \vec{E} = 0$ .

Maxwell-Faraday :  $\text{rot} \vec{E} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$  donne  $-j\vec{k} \wedge \vec{E} = -j\omega \vec{B}$ , soit :

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} = \frac{\vec{u} \wedge \vec{E}}{c}$$

Maxwell-Ampère :  $\text{rot} \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  donne  $-j\vec{k} \wedge \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 j\omega \vec{E}$ , soit :

$$\vec{E} = c^2 \frac{\vec{B} \wedge \vec{k}}{\omega} = c \vec{B} \wedge \vec{u}$$

Il en ressort que, pour une OPPH :

#### Propriété 3

Les champs électrique  $\vec{E}$  et magnétique  $\vec{B}$  d'une OPPH sont **transverses** : ils sont orthogonaux au vecteur d'onde  $\vec{k}$  qui donne la direction et le sens de la propagation.

Les champs électrique et magnétique sont orthogonaux et le trièdre  $(\vec{k}, \vec{E}, \vec{B})$  est orthogonal direct (fig. 3) :

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} = \frac{\vec{u} \wedge \vec{E}}{c}$$

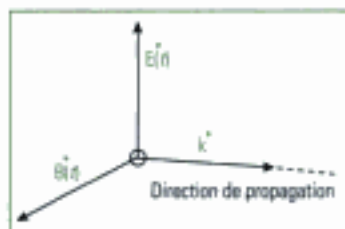


Fig. 3 - Structure d'une onde plane.

1. Cette expression est aussi valable avec les expressions réelles des champs du fait de la linéarité des équations de Maxwell et de l'expression du champ.

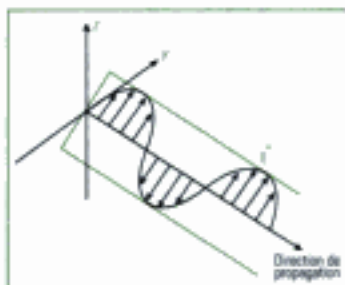


Fig. 4 - Direction fixe du champ  $\vec{E}$  au cours du temps.

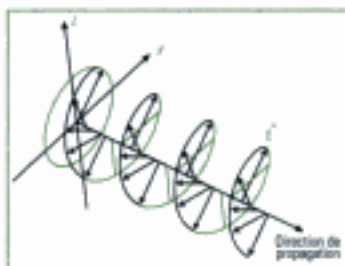


Fig. 5 - La direction du champ  $\vec{E}$  varie au cours du temps.

2. Il s'agit de la base cartésienne du repère lié au référentiel dans lequel l'étude est faite.

3. Le champ magnétique, qui reste orthogonal au vecteur d'onde et au champ électrique, a une direction qui subit la même évolution que celle de  $\vec{E}$ .

## D. Polarisation de l'OPPH

On ne s'est pas encore intéressé jusqu'ici à la direction du champ électrique, laquelle a été supposée fixe.

Lorsque le champ n'a qu'une composante dans la base de projection choisie, alors sa direction reste fixe (fig. 4).

Lorsque le champ possède deux composantes, celles-ci peuvent être déphasées l'une par rapport à l'autre et l'évolution de la direction du vecteur champ électrique définit son état de polarisation (fig. 5).

Dans ce paragraphe, on suppose une propagation dans la direction et le sens de l'axe  $x'x$ . Le vecteur d'onde s'écrit  $\vec{k} = k \vec{u}_x$ , avec  $k = \frac{\omega}{c} > 0$ .

1. C'est le cas dans lequel on s'est placé précédemment.

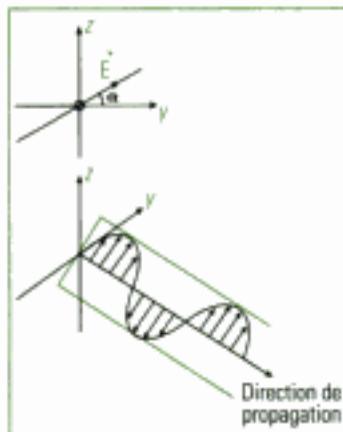


Fig. 6 - Polarisation rectiligne.

2. Un calcul mathématique permet de déterminer précisément l'angle que fait le grand axe de l'ellipse avec un des axes de coordonnées, mais il n'y a pas d'intérêt physique.

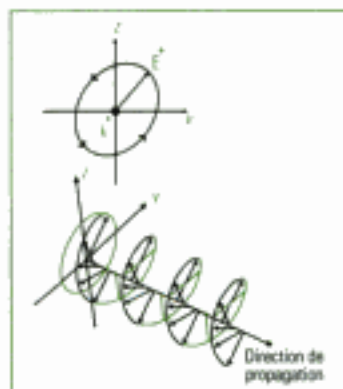


Fig. 7 - Polarisation elliptique gauche.

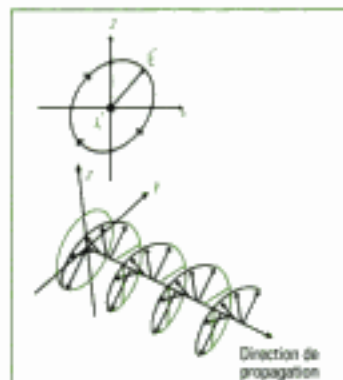


Fig. 8 - Polarisation elliptique droite.

3. On verra dans les pages méthodes comment déterminer le sens d'une polarisation à partir de l'expression du champ de l'onde.

## D.1. Polarisation rectiligne

On dit que l'onde est polarisée rectilignement lorsque ses champs gardent une direction fixe.<sup>1</sup>

Comme les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  ont une évolution analogue, on décrira celle du champ électrique  $\vec{E}$ .

$$\vec{E}(x, t) = \vec{E}_0 \cos(\omega t - kx + \varphi).$$

Il se projette dans un plan Oyz, car il est transverse :

$$\vec{E} = \begin{cases} E_x = 0 \\ E_y = E_{0y} \cos(\omega t - kx + \varphi) \\ E_z = E_{0z} \cos(\omega t - kx + \varphi) \end{cases}$$

$$\text{On a donc } \frac{E_z}{E_y} = \frac{E_{0z}}{E_{0y}} = \tan \alpha.$$

### Définition 6

Lorsque les composantes du champ électrique sont en phase, l'extrémité du vecteur  $\vec{E}$  décrit un segment de droite : on dit que la **polarisation est rectiligne** (fig. 6).

## D.2. Polarisation elliptique

Si les deux composantes du champ électrique sont déphasées entre elles, alors on n'a plus  $\frac{E_z}{E_y} = \text{constante}$ , et la courbe décrite par l'extrémité du vecteur  $\vec{E}$  est donnée par un système d'équations paramétriques :

$$\vec{E} = \begin{cases} E_x = 0 \\ E_y = E_{0y} \cos(\omega t - kx) \\ E_z = E_{0z} \cos(\omega t - kx + \varphi) \end{cases}$$

expression dans laquelle  $\varphi$  désigne le déphasage entre les deux composantes du champ.

On reconnaît une équation paramétrique d'ellipse<sup>2</sup> de centre O.

### Définition 7

Si les deux composantes du champ  $\vec{E}$  sont déphasées, alors la **polarisation est elliptique** : l'extrémité du champ  $\vec{E}$  décrit une ellipse.

On trace cette ellipse dans un plan orthogonal à  $\vec{k}$ , en dirigeant conventionnellement le vecteur d'onde vers l'œil de l'observateur.

Il reste à déterminer le sens de parcours de l'ellipse par le champ.

### Définition 8

Si l'ellipse est parcourue dans le sens trigonométrique, le schéma étant réalisé avec  $\vec{k}$  venant vers l'observateur, alors la **polarisation est dite elliptique gauche** (fig. 7).

Si elle est parcourue dans le sens horaire, alors la **polarisation est dite elliptique droite** (fig. 8).

Ici, le sens de la polarisation est liée à la valeur de  $\varphi$ .<sup>3</sup>

En notation complexe, le champ électrique s'écrit :

$$E_y = E_{0y} e^{j(\omega t - kx)}, E_z = E_{0z} e^{j(\omega t - kx + \varphi)} = E_{0z} e^{j\varphi} e^{j(\omega t - kx)},$$

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{j(\omega t - kx)}, \text{ avec } \vec{E}_0 = E_{0y} \vec{u}_y + E_{0z} e^{j\varphi} \vec{u}_z.$$



1. Le déphasage entre les composantes vaut  $\pi/2$ .

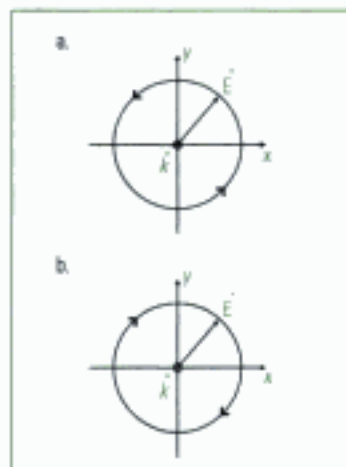


Fig. 9 - a. Polarisation circulaire gauche.

b. Polarisation circulaire droite.

2. Ou du champ magnétique, bien sûr.

3. Pour de plus amples explications, consulter le cours d'optique.

4. Les polariseurs sont introduits en travaux pratiques.

5. Ce sont des matériaux isolants.

6. On parle de polarisation par réflexion vitreuse. On peut démontrer ce résultat à partir du cours de physique des ondes de la section PC-PSI. Ainsi, les reflets peuvent être polarisés rectilignement.

7. Les ondes « se dispersent », d'où le nom choisi.

8. Un prisme disperse la lumière car l'angle de déviation dépend de la couleur, donc de la fréquence de l'onde.

## D.3. Polarisation circulaire

Il s'agit du cas particulier de la polarisation elliptique pour lequel les deux composantes ont même amplitude et sont en quadrature de phase.<sup>1</sup>

On a alors :

$$\vec{E} = \begin{cases} E_x = 0 \\ E_y = E_0 \cos(\omega t - kx) \\ E_z = E_0 \cos\left(\omega t - kx \pm \frac{\pi}{2}\right) = \pm E_0 \sin(\omega t - kx) \end{cases}$$

On voit que  $E_y^2 + E_z^2 = E_0^2$ , qui constitue une équation de cercle.

### Définition 9

Si les deux composantes du champ électrique sont en quadrature de phase et ont la même amplitude, alors la **polarisation est circulaire** : l'extrémité du champ  $\vec{E}$  décrit un cercle.

Si le cercle est parcouru dans le sens trigonométrique, le schéma étant réalisé avec  $\vec{k}$  venant vers l'observateur, alors la **polarisation est dite circulaire gauche** (fig. 9.a).

S'il est parcouru dans le sens horaire, alors la **polarisation est dite circulaire droite** (fig. 9.b).

## D.4. Onde non polarisée

Une onde est dite non polarisée si la direction du champ électrique<sup>2</sup> ne satisfait aucune des conditions précédentes.

C'est le cas de la lumière naturelle, celle qui nous vient du soleil ou d'une ampoule.

En effet, on constate que la polarisation du champ observé est aléatoire. Cela est dû au mécanisme de production de la lumière par la matière.

La lumière provient de l'émission d'un photon par un atome qui se désexcite<sup>3</sup>. La durée d'émission du photon est de l'ordre de  $10^{-11}$  seconde. Pendant cette durée, l'onde émise possède un état de polarisation déterminé. Le photon qui suit est émis de manière indépendante et l'état de polarisation du nouveau train d'onde est différent du précédent, et sans lien avec.

Donc en une seconde, le champ passe par quelques  $10^{11}$  états de polarisation différents et indépendants. Sa polarisation nous paraît donc rester aléatoire.

Mais la polarisation naturelle de la lumière existe. Certains milieux polarisent la lumière<sup>4</sup> rectilignement, tandis que dans certaines conditions, la réflexion sur un diélectrique<sup>5</sup> transparent produit une onde réfléchie polarisée rectilignement.<sup>6</sup>

## E. Dispersion

### E.1. Définition

#### Définition 10

On dit qu'il y a **dispersion** si deux ondes de fréquences différentes ne se propagent pas de la même manière<sup>7</sup>. Soit elles se déplacent à des vitesses différentes, soit elles prennent des directions différentes.<sup>8</sup>

L'étude actuelle étant effectuée dans le vide, la dispersion ne concernera que la vitesse de déplacement de l'onde.

Si la vitesse de propagation de l'onde dépend de la fréquence, alors il y a dispersion. Dans le cas contraire, il n'y a pas dispersion.

## E.2. Relation de dispersion

### Définition 11

La **relation de dispersion** est donnée par l'équation qui relie le module  $k$  du vecteur d'onde et la pulsation  $\omega$ .

On l'obtient en introduisant l'expression du champ dans son équation de propagation.

Par exemple, une OPPH a un champ qui s'écrit, en notation complexe :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{j(\omega t - kx)}, \text{ avec } \vec{E}_0 = E_{0y} \vec{u}_y + E_{0z} e^{j\theta} \vec{u}_z.^1$$

L'équation de propagation du champ est l'équation de d'Alembert :

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}.$$

En introduisant l'expression du champ de l'OPPH dans l'équation de d'Alembert, on obtiendra la relation de dispersion.

En coordonnées cartésiennes, on a  $\Delta = \vec{\nabla}^2.^2$

Comme on travaille avec une OPPH, il vient :

$$\Delta = \vec{\nabla}^2 \rightarrow \times (-jk)^2 = \times -k^2, \frac{\partial^2}{\partial t^2} \rightarrow \times (j\omega)^2 = \times -\omega^2.$$

L'équation de d'Alembert devient :

$$-k^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} (-\omega^2 \vec{E}) = \vec{0}, \text{ soit } k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}.$$

On retrouve le lien entre  $k$  et  $\omega$  qui venait de la définition de l'OPPH.

En effet, on trouve maintenant  $k = \pm \frac{\omega}{c}$ , dont le module est  $|k| = \frac{\omega}{c}$ , identique à celui donné dans la définition de l'OPPH.

## E.3. Vitesse de phase

Pour l'OPPH, l'expression du champ est, en notation complexe :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{j(\omega t - kx)}.$$

La phase  $\phi$  du champ est définie par :

$$\phi = \omega t - kx.$$

La vitesse de phase est la vitesse de déplacement de la phase. Un état de phase fixé ( $\phi = \text{constante}$ ) se déplace à la vitesse  $v_\phi$ .

Pour calculer cette vitesse, il faut différentier la phase :

$$d\phi = 0 = \omega dt - k dx, \text{ soit } v_\phi = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k}.$$

On la trouve positive. Cela rappelle que la propagation a lieu dans le sens positif de l'axe  $x'x$ .

### Définition 12

La **vitesse de phase** est donnée par la relation :

$$v_\phi = \frac{\omega}{k},$$

où  $\omega$  est la pulsation et  $k$  le module du vecteur d'onde.

## E.4. Vitesse de groupe

Pour introduire la notion de vitesse de groupe, on étudie la propagation d'un groupe de deux ondes de pulsations voisines  $\omega$  et  $\omega + d\omega$  et nombres d'onde voisins  $k$  et  $k + dk$ . La propagation a lieu dans la même direction et le même

1. On a choisi un état de polarisation elliptique (les polarisations rectiligne et circulaire en sont des cas particuliers) et une propagation dans la direction et le sens de l'axe  $x'x$ .

2. Voir le formulaire du chapitre 1.

3. Nous verrons que la vitesse de phase n'a pas de réalité physique, car elle ne correspond pas à la vitesse de déplacement de l'énergie. On peut remarquer en outre que, si elle dépend de la pulsation  $\omega$ , alors le milieu dans lequel l'onde se propage est dispersif.



1. Les variations étant infimes, on utilise la notation différentielle qui exprime de très petites variations.

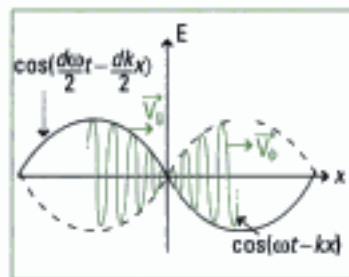


Fig. 10 - Vitesse de groupe  $\vec{v}_g$  et vitesse de phase  $\vec{v}_p$ .

sens, celui de l'axe  $x'x$ . Les champs  $\vec{E}_1$  et  $\vec{E}_2$  des deux ondes ont même amplitude, sont colinéaires et se projettent sur leur direction :

$$E_1 = E_0 \cos(\omega t - kx), E_2 = E_0 \cos((\omega + d\omega)t - (k + dk)x).$$

Les pulsations et nombres d'onde étant voisins, on a :

$$d\omega \ll \omega \text{ et } dk \ll k.^1$$

Le champ total est la somme des deux champs  $\vec{E}_1$  et  $\vec{E}_2$  :

$$E = E_1 + E_2 = E_0 \cos(\omega t - kx) + E_0 \cos((\omega + d\omega)t - (k + dk)x),$$

$$E = 2E_0 \cos\left(\frac{d\omega}{2}t - \frac{dk}{2}x\right) \cos\left(\left(\omega + \frac{d\omega}{2}\right)t - \left(k + \frac{dk}{2}\right)x\right),$$

$$E \simeq 2E_0 \cos\left(\frac{d\omega}{2}t - \frac{dk}{2}x\right) \cos(\omega t - kx).$$

Ce champ est un produit de deux cosinus de périodes très différentes (fig. 10) :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \text{ et } T' = \frac{4\pi}{d\omega}, \text{ avec } \frac{T'}{T} = \frac{2\omega}{d\omega} \gg 1.$$

Lorsque l'on représente la courbe  $E(t)$  pour une valeur fixée de  $x$ , le cosinus dont la période  $T'$  est la plus élevée constitue l'enveloppe de celui dont la période  $T$  est la plus petite.

Ainsi, le champ résultant possède une pulsation égale à  $\omega$  et une amplitude égale à  $2E_0 \cos\left(\frac{d\omega}{2}t - \frac{dk}{2}x\right)$ . La vitesse de déplacement du champ variable à l'intérieur de son enveloppe est la vitesse de phase  $v_p = \frac{\omega}{k}$  et celle de l'enveloppe est  $v_g = \frac{d\omega}{dk}$ . En effet, la vitesse de déplacement d'une sinusoïde est sa vitesse de phase. La phase  $\psi$  de l'enveloppe est  $\psi = \frac{d\omega}{2}t - \frac{dk}{2}x$  et sa vitesse est donnée par  $d\psi = 0 = \frac{d\omega}{2}dt - \frac{dk}{2}dx$ , soit :  $\frac{dx}{dt} = \frac{d\omega}{dk} = v_g$ .

#### Définition 13

La **vitesse de groupe** est la vitesse de déplacement de l'amplitude du champ résultant. Elle est donnée par la relation :

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}$$

C'est la dérivée de la pulsation par rapport au nombre d'onde.

Pour une OPPH, la relation de dispersion est  $k = \frac{\omega}{c}$ , soit  $\omega = kc$  et la vitesse de groupe est :

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = c.^2$$

2. La vitesse de groupe est toujours inférieure à la célérité :  $v_g < c$ , contrairement à la vitesse de phase qui peut être supérieure à  $c$ . Ceci s'explique par le fait que la vitesse de phase n'a pas de sens physique alors que la vitesse de groupe en a un que l'on va découvrir au paragraphe suivant.

3. On voit que le vecteur de Poynting  $\vec{R}$  est orienté dans le même sens que le vecteur d'onde  $\vec{k}$  : l'énergie se propage donc naturellement dans la même direction que l'onde.

## E.5. Vitesse de l'énergie

Considérons une OPPH et appelons  $v_e$  la vitesse de propagation de son énergie.

Son vecteur de Poynting s'écrit :

$$\vec{R} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{\vec{E} \wedge (\vec{k} \wedge \vec{E})}{\mu_0 \omega} = \frac{\vec{E}^2}{\mu_0 \omega} \vec{k} - \frac{(\vec{k} \cdot \vec{E})}{\mu_0 \omega} \vec{E} = \frac{E^2}{\mu_0 \omega} \vec{k},$$

Prenons  $\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{u}_y$ , on a :

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} = \frac{\vec{u}_x \wedge \vec{E}}{c} = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t - kx) \vec{u}_z.$$

Le vecteur de Poynting s'écrit :

$$\vec{R} = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \cos^2(\omega t - kx) \vec{u}_x,$$

et sa valeur moyenne est :

$$\langle \vec{R} \rangle = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} \vec{u}_x.$$



1. Il s'agit de la moyenne temporelle du vecteur de Poynting.

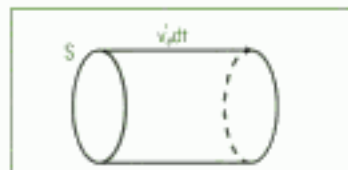


Fig. 11 - Volume élémentaire  $d\tau = S v_e dt$ .

2. Il n'est pas besoin de sommer sur un volume, car celui-ci est déjà élémentaire.

3. Si l'onde est amortie, alors l'amplitude décroît pendant la propagation et il est impossible de calculer la vitesse d'une grandeur variable.

Considérons une surface  $S$  orthogonale au vecteur de Poynting  $\vec{R}$ .

La puissance électromagnétique moyenne  $\langle P \rangle$  qui traverse la surface  $S$  est égale au flux de  $\langle \vec{R} \rangle$  à travers cette surface :

$$\langle P \rangle = \iint_S \langle \vec{R} \rangle \cdot d\vec{S} = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} S.$$

C'est donc la puissance moyenne que l'onde rayonne à travers la surface, car le vecteur de Poynting est colinéaire au vecteur d'onde.

L'énergie moyenne  $dW$  qui traverse cette surface pendant un intervalle de temps élémentaire  $dt$  vaut donc :

$$dW = \langle P \rangle dt = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} S dt.$$

Soit  $v_e$  la vitesse de propagation de l'énergie rayonnée par le champ. L'énergie moyenne  $dW$  qui traverse cette surface pendant un intervalle de temps élémentaire  $dt$  est aussi l'énergie contenue dans le volume  $d\tau$  du cylindre de surface  $S$  et de génératrice  $v_e dt$  (fig. 11) :

$$d\tau = S v_e dt.$$

On peut calculer l'énergie moyenne  $dW$  contenue dans ce volume à partir de la valeur moyenne de la densité volumique d'énergie :

$$\left\langle \frac{dW}{d\tau} \right\rangle = \epsilon_0 \frac{\langle E^2 \rangle}{2} + \frac{\langle B^2 \rangle}{2\mu_0},$$

$$\left\langle \frac{dW}{d\tau} \right\rangle = \epsilon_0 \frac{E_0^2}{4} + \frac{E_0^2}{4\mu_0 c^2} = \epsilon_0 \frac{E_0^2}{2},$$

$$dW = \left\langle \frac{dW}{d\tau} \right\rangle d\tau = \epsilon_0 \frac{E_0^2}{2} S v_e dt.$$

On égale les deux expressions de l'énergie qui a traversé la surface  $S$  pendant l'intervalle de temps élémentaire  $dt$  :

$$dW = \left\langle \frac{dW}{d\tau} \right\rangle d\tau = \langle P \rangle dt, \text{ soit } \left\langle \frac{dW}{d\tau} \right\rangle S v_e dt = \langle P \rangle dt = \langle R \rangle S dt.$$

Il vient alors :

#### Définition 14

La **vitesse de propagation de l'énergie d'une onde électromagnétique**  $v_e$  est égale au rapport de la valeur moyenne du vecteur de Poynting  $\langle R \rangle$  divisée par la valeur moyenne de la densité volumique d'énergie électromagnétique  $\left\langle \frac{dW}{d\tau} \right\rangle$  :

$$v_e = \frac{\langle R \rangle}{\left\langle \frac{dW}{d\tau} \right\rangle}.$$

Pour une OPPH, l'égalité des deux énergies donne :

$$\epsilon_0 \frac{E_0^2}{2} S v_e dt = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} S dt, \text{ soit } v_e = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0 c} = c.$$

La vitesse de l'énergie est égale à  $c$  pour une OPPH.

Dans la mesure où l'énergie moyenne est proportionnelle au carré de l'amplitude du champ, on admet le résultat suivant :

#### Propriété 4

La vitesse de propagation de l'énergie d'une onde  $v_e$  est égale à la vitesse de groupe  $v_g$  lorsque l'onde n'est pas amortie dans son déplacement :

$$v_e = v_g.$$

$v_e$  désigne ainsi la vitesse moyenne de propagation de l'énergie, et donc de l'information. C'est pourquoi elle est nécessairement inférieure à la célérité  $c$ .

## F. Propagation d'une OPPH dans un plasma

1. Le plasma modélise grossièrement la haute atmosphère, et les résultats donnés par ce modèle sont alors conformes aux observations.

On fait apparaître un exemple de relation de dispersion au travers de cette étude de propagation dans un plasma.<sup>1</sup>

### F.1. Définition et hypothèses

Un plasma est un milieu homogène très dilué dans lequel les atomes sont ionisés. Il est globalement neutre ( $\rho_{\text{tot}} = 0$ ) et les charges sont suffisamment éloignées les unes des autres pour qu'elles n'exercent aucune interaction les unes avec les autres.

On note  $M$  la masse des ions positifs, supposés porter une charge  $+e$ , et  $m$  la masse des électrons libres portant la charge  $-e$ .

Soit  $\alpha$  le nombre d'électrons et d'ions par unité de volume de plasma.

2. L'effet du poids est donc négligé.

On néglige l'action de toute force gravitationnelle<sup>2</sup>. Sous l'action du champ électromagnétique de l'onde, les charges sont mises en mouvement du fait de la force de Lorentz :

$$\vec{f} = q (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}).$$

On suppose de plus que les particules gardent des vitesses non relativistes :

$$v \ll c.$$

En conséquence, la force de Coulomb  $\vec{F} = q\vec{E}$  a un module très supérieur à celui de la force magnétique  $\vec{f}' = q\vec{v} \wedge \vec{B}$ . En effet, si on calcule le rapport des modules de ces deux forces :

$$\frac{\|\vec{f}'\|}{\|\vec{F}\|} = \frac{\|\vec{v} \wedge \vec{B}\|}{\|\vec{E}\|} \leq \frac{vB}{E}, \text{ où } v = \|\vec{v}\|, E = \|\vec{E}\| \text{ et } B = \|\vec{B}\|.$$

Or le champ électromagnétique est celui d'une OPPH, donc  $B = \frac{E}{c}$ , et :

$$\frac{\|\vec{f}'\|}{\|\vec{F}\|} \leq \frac{vB}{E} = \frac{v}{c} \ll 1.$$

La force magnétique est donc négligeable devant la force de Lorentz.

Enfin, on suppose que les ions positifs restent immobiles, car ils sont bien plus lourds que les électrons et leur mouvement de très faible amplitude n'est pas pris en compte. Les seules charges mobiles considérées dans ce modèle sont donc les électrons.

Le mouvement des charges sous l'action du champ électrique  $\vec{E}$  de l'onde produit une densité  $\vec{j}$  de courant volumique.

On note  $\rho$  la densité volumique de charges mobiles qui possèdent la vitesse  $\vec{v}$ . Ce sont les électrons et on a donc :

$$\rho = -\alpha e.$$

Cette vitesse  $\vec{v}$  acquise par les électrons provient de l'action du champ électrique  $\vec{E}$  de l'OPPH.

Écrivons le principe fondamental de la mécanique appliqué à un électron :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{E}.$$

La densité  $\vec{j}$  de courant volumique dû au mouvement des électrons s'écrit :

$$\vec{j} = \rho \vec{v} = -\alpha e \vec{v}, \text{ soit } \vec{v} = \frac{-\vec{j}}{\alpha e},$$

et l'équation du mouvement donne alors la relation entre  $\vec{j}$  et  $\vec{E}$  :

$$-\frac{m}{\alpha e} \frac{d\vec{j}}{dt} = -e\vec{E}, \text{ soit } \frac{d\vec{j}}{dt} = \frac{\alpha e^2}{m} \vec{E}.$$

## F.2. Équation de propagation

On cherche l'équation aux dérivées partielles satisfaite par l'un des champs, par exemple par le champ électrique. On utilise pour cela les équations de Maxwell, sachant que le plasma est traversé par une densité de courant volumique  $\vec{j}$ .

Pour trouver une telle équation, on écrit les équations de Maxwell :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{B} = 0 & \text{équation de Maxwell-flux} \\ \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho_{\text{tot}}}{\epsilon_0} = 0 & \text{équation de Maxwell-Gauss} \\ \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \text{équation de Maxwell-Faraday} \\ \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} & \text{équation de Maxwell-Ampère} \end{cases}$$

1. Voir chapitre 1.

On utilise la formule d'analyse vectorielle<sup>1</sup> suivante :

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{E}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{E}) - \Delta \vec{E},$$

que l'on transforme grâce aux équations de Maxwell précédemment écrites :

$$\operatorname{rot} \vec{E} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \text{ donc } \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{E}) = \operatorname{rot}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{rot} \vec{B}),^2$$

2. Les variables d'espace et de temps sont indépendantes et on peut inverser l'ordre des dérivations.

puis, comme  $\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ , on écrit :

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{E}) = -\mu_0 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}.$$

$\operatorname{div} \vec{E} = 0$  et  $\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{E}) = -\Delta \vec{E}$ . Il vient donc :

$$\Delta \vec{E} - \mu_0 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}. \text{ Avec } \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = \frac{\alpha e^2}{m} \vec{E}, \text{ on obtient finalement :}$$

$$\Delta \vec{E} - \frac{\mu_0 \alpha e^2}{m} \vec{E} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}.$$

## F.3. Relation de dispersion

On prend l'expression générale du champ de l'OPPH, que l'on introduira dans l'équation de propagation, afin de trouver la relation entre le nombre d'onde  $k$  et la pulsation  $\omega$ .

3. On a choisi une propagation dans la direction de l'axe  $x'x$ , mais cela n'a aucune influence sur les conclusions de cette partie.

On utilise la notation complexe :  $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{j(\omega t - kx)}$ , et grâce à cette notation, les dérivées deviennent de simples multiplications par des coefficients constants :

$$\Delta = \nabla^2 \rightarrow \times (-j\vec{k})^2 = \times -k^2, \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} \rightarrow \times (j\omega)^2 = \times -\omega^2.$$

Ainsi,  $\Delta \vec{E} \rightarrow -k^2 \vec{E}$  et  $\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \rightarrow -\omega^2 \vec{E}$ , de sorte que l'équation devient :

$$-k^2 \vec{E} - \frac{\mu_0 \alpha e^2}{m} \vec{E} - \frac{1}{c^2} (-\omega^2 \vec{E}) = \vec{0},^4$$

4. On rappelle que l'on a toujours :  $\epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$ .

pour donner enfin :

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\mu_0 \alpha e^2}{m}.$$

## F.4. Nombre d'onde, interprétation

La détermination du nombre d'onde  $k$  donne des informations sur la propagation de l'onde. Posons :

$$\omega_p^2 = \frac{\mu_0 c^2 \alpha e^2}{m} = \frac{\alpha e^2}{\epsilon_0 m}. \text{ On a alors :}$$

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\mu_0 \alpha e^2}{m} = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2} = \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right).$$



1.  $\omega_p$  est homogène à une pulsation, le rapport  $\frac{\omega_p}{\omega}$  étant sans dimension.

2. Le choix de la polarisation n'est pas lié à l'influence du nombre d'onde sur la propagation. C'est cette influence que l'on étudie ici et dans le but de clarifier les expressions, on prend la polarisation la plus simple.

3.  $\omega_p$  est homogène à une pulsation, le rapport  $\frac{\omega_p}{\omega}$  étant sans dimension.

• Si  $\omega < \omega_p$ , alors  $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left( 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right) < 0$ .

Le nombre d'onde est alors imaginaire pur :

$$k = \pm j \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{\omega_p^2}{\omega^2} - 1}.$$

On a supposé une propagation dans la direction de l'axe  $x'x$ , et on choisit une polarisation rectiligne.<sup>2</sup> L'expression complexe du champ est :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{j(\omega t - kx)}.$$

Remplaçons le nombre d'onde par son expression :

$k = \pm j \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{\omega_p^2}{\omega^2} - 1} = jk_i$ , où  $k_i$  désigne sa partie imaginaire. Il vient :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{j(\omega t - jk_i x)} = \vec{E}_0 e^{k_i x} e^{j\omega t}.$$

Le champ réellement observé est la partie réelle du champ complexe :

$$\vec{E}(x, t) = \text{Re}(\vec{E}) = \vec{E}_0 e^{k_i x} \cos(\omega t).$$

Un tel champ est à variables séparées. Sa phase  $\phi = \omega t$  ne contient plus les deux variables d'espace et de temps. On ne peut plus extraire de vitesse de phase en annulant sa différentielle.

**L'onde ne se propage donc pas lorsque  $\omega < \omega_p$ .**

• Si  $\omega > \omega_p$ , alors  $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left( 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right) > 0$ .

Le nombre d'onde est alors réel :

$$k = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} = k_r = \text{Re}(k).$$

Remplaçons le nombre d'onde par son expression dans le champ :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{j(\omega t - k_r x)}.$$

Le champ réellement observé est la partie réelle du champ complexe :

$$\vec{E}(x, t) = \text{Re}(\vec{E}) = \vec{E}_0 \cos(\omega t - k_r x).$$

Un tel champ reste à variables liées. Sa phase  $\phi = \omega t - k_r x$  contient encore les deux variables d'espace et de temps. On peut donc extraire une vitesse de phase en annulant sa différentielle :

$$d\phi = 0 = \omega dt - k_r dx \text{ qui donne } v_\phi = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k_r}.$$

**L'onde se propage donc lorsque  $\omega > \omega_p$ .**

Rappelons les résultats de cette étude :

#### Propriété 5

La grandeur  $\omega_p = \sqrt{\frac{\alpha e^2}{\epsilon_0 m}}$  est homogène à une pulsation. C'est la **pulsation plasma**.

Lorsque  $\omega < \omega_p$ , le nombre d'onde est imaginaire pur et l'onde ne peut pas se propager dans le plasma.

Lorsque  $\omega > \omega_p$ , le nombre d'onde est réel et l'onde peut se propager dans le plasma.

Le plasma se comporte comme un filtre « passe-haut ». Les ondes dont la fréquence n'est pas suffisamment haute sont réfléchies par le plasma, alors que celle dont la fréquence est supérieure à la fréquence plasma y pénètrent et peuvent s'y propager pour le traverser.

Hidden page

Hidden page



1. Comme l'onde n'est pas une OPPH, on n'a pas le droit d'utiliser la correspondance :  $\vec{\nabla} \leftrightarrow -jk\vec{u}_y$

Le champ n'étant pas celui d'une OPPH, son introduction dans l'équation de d'Alembert ne donnera pas la relation de dispersion classique de l'OPPH  $k = \frac{\omega}{c}$  ;

$$\Delta \vec{E} = \vec{\nabla}^2 \vec{E} = \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} = E_0 e^{j(\omega t - kz)} \vec{u}_y (f''(x) + 0 - k^2 f(x)) ;$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\frac{1}{c^2} (-\omega^2) E_0 f(x) e^{j(\omega t - kz)} \vec{u}_y = \frac{\omega^2}{c^2} E_0 f(x) e^{j(\omega t - kz)} \vec{u}_y$$

L'équation de propagation devient alors :

$$E_0 e^{j(\omega t - kz)} \vec{u}_y (f''(x) - k^2 f(x)) + \frac{\omega^2}{c^2} E_0 f(x) e^{j(\omega t - kz)} \vec{u}_y = \vec{0}, \text{ soit :}$$

$$f''(x) + \left( \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) f(x) = 0.$$

On a obtenu une équation différentielle qui permettra de déterminer la fonction inconnue  $f(x)$ .

C'est une équation différentielle du second ordre à coefficients constants. La forme de la solution dépend du signe du coefficient  $\frac{\omega^2}{c^2} - k^2$ .  $\frac{\omega^2}{c^2} - k^2$  est réel, la solution  $f(x)$  est donc réelle et on distingue trois cas.

• Si  $\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 = 0$ , alors la solution s'écrit :

$$f(x) = K_1 x + K_2, \text{ où } K_1, K_2 \text{ sont deux constantes.}$$

Écrivons les conditions de passage du champ électrique au niveau des plans conducteurs. Le champ électrique étant tangentiel, il est continu lors de la traversée des plans d'équation  $x=0$  et  $x=a$ . Comme il est nul à l'intérieur du conducteur, il doit s'annuler sur sa surface :

$E(x=0, z, t) = 0$  et  $E(x=a, z, t) = 0$  pour  $z$  et  $t$  quelconques. Il vient :

$f(0) = 0$  qui donne  $K_2 = 0$ , et  $f(a) = 0$ , dont on déduit  $K_1 = 0$ .

Le champ  $\vec{E}$  est nul, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de solution non nulle dans ce cas.<sup>2</sup>

• Si  $\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 < 0$ , alors les solutions de l'équation différentielle sont exponentielles :

$$f(x) = K_1 e^{\sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} x} + K_2 e^{-\sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} x}.$$

Les conditions aux limites imposées par la présence des plans conducteurs s'écrivent :

$f(0) = 0$ , qui donne  $K_1 + K_2 = 0$ , ou  $K_1 = -K_2$ ,

$$f(a) = 0, \text{ qui donne } K_1 \left( e^{\sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} a} - e^{-\sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} a} \right) = 0, \text{ soit :}$$

$$K_1 = K_2 = 0.<sup>3</sup>$$

Dans ce cas aussi, il n'existe pas de solution non nulle.

• Si  $\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 > 0$ , alors les solutions de l'équation différentielle sont sinusoïdales :

$$f(x) = K \sin \left( \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k^2} x + \varphi \right).$$

2. Un champ nul est une solution évidente de l'équation de d'Alembert.

3. En effet, si  $\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \neq 0$ , alors la parenthèse est non nulle pour tout  $a$  non nul.

1.  $\varphi = \pi$  est possible. Cela ne change que le signe de  $K$  sans changer la forme du champ.

2. Ce choix restrictif est lié au libellé du programme.

Les conditions aux limites imposées par la présence des plans conducteurs s'écrivent :

$$f(0) = 0, \text{ qui donne } \sin(\varphi) = 0, \text{ soit } \varphi = 0.^1$$

$$f(a) = 0 \text{ donne ici } K \sin\left(\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k^2} a\right) = 0.$$

Si  $K = 0$ , alors le champ est nul : cette solution est inintéressante. Il faut :

$$\sin\left(\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k^2} a\right) = 0, \text{ soit } \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k^2} a = n\pi, \text{ où } n \text{ est un entier positif.}$$

Il y a donc une infinité de solutions, et on choisit la première donnée par la valeur  $n = 1$ .<sup>2</sup> On a alors :

$$\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k^2} a = \pi, \text{ soit } k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\pi^2}{a^2}.$$

C'est la relation de dispersion qui existe dans l'espace entre deux plans conducteurs.

#### Propriété 8

Le champ s'écrit dans ce « guide d'onde » :

$$\vec{E} = E_0 \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) e^{j(\omega t - kz)} \vec{u}_y \text{ en notation complexe, ou}$$

$$\vec{E}(x, z, t) = E_0 \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) \cos(\omega t - kz) \vec{u}_y \text{ en notation réelle.}$$

La relation de dispersion  $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\pi^2}{a^2}$  relie les valeurs du nombre d'onde  $k$  et de la pulsation  $\omega$ .

L'onde ne peut se propager lorsque sa pulsation  $\omega$  reste inférieure à  $\omega_0 = \frac{\pi c}{a}$ . Lorsque l'onde peut se propager, les vitesses de propagation dépendent de la fréquence : il y a dispersion.

La cause de ce phénomène de dispersion et de l'effet « filtre passe-haut » est la présence des deux plans conducteurs.

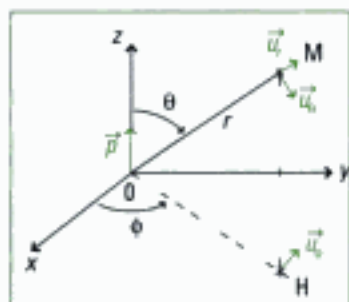


Fig. 15 - Dipôle  $\vec{p}$ .

3. Un moment dipolaire de ce type simule assez correctement une antenne rectiligne commune.

4. Dans la réalité, le fait d'assimiler l'air au vide n'introduit pas d'erreur notable pour ce qui est de l'étude des ondes électromagnétiques.

## H. Rayonnement d'un dipôle oscillant

### H.1. Modèle et hypothèses

On étudie dans cette partie le champ créé à grande distance par un moment dipolaire variable  $\vec{p}$  (fig. 15) d'expression :

$$\vec{p}(t) = p_0 \cos \omega t \vec{u}_z.$$

Ce moment dipolaire peut être le moment dipolaire résultant d'un certain volume de matière. Les hypothèses de l'étude sont les suivantes :

On étudie le champ électromagnétique rayonné par ce dipôle à grande distance dans le vide<sup>3</sup>. Soit  $a$  l'étendue de la distribution et  $\lambda$  la longueur d'onde de l'onde émise, on étudie le champ créé à la distance  $r$  telle que :

- $r \gg a$  : la distribution apparaît comme un seul dipôle ponctuel que l'on place à l'origine  $O$  du repère cartésien lié au référentiel d'étude.
- $r \gg \lambda$ , avec  $\frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$ . On parle de « zone de rayonnement » lorsque cette condition est vérifiée. Nous verrons de quelle manière cette hypothèse simplifie les calculs.

On suppose aussi que l'interaction électromagnétique (le champ, en l'occurrence), se propage à la vitesse  $c$ , c'est-à-dire qu'il n'y a pas de dispersion.

Le dipôle rayonne *a priori* dans toutes les directions de l'espace, et on choisira le système des coordonnées sphériques et la base locale associée.

Hidden page



Or  $\vec{u}_s = \cos\theta \vec{u}_r - \sin\theta \vec{u}_\theta$ , on obtient alors dans la base sphérique :

$$\vec{A}(M, t) = \begin{pmatrix} \frac{j\omega\mu_0 p_0}{4\pi r} \cos\theta e^{j\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)} \\ -\frac{j\omega\mu_0 p_0}{4\pi r} \sin\theta e^{j\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_r(r, \theta) \\ A_\theta(r, \theta) \\ A_\phi = 0 \end{pmatrix}$$

On peut donc maintenant calculer le rotationnel. Beaucoup de termes sont nuls, car une composante est nulle et les autres ne dépendent pas de  $\phi$  :

$$\text{rot } \vec{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{r} \left( \frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \end{pmatrix} = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \vec{u}_\phi, \text{ soit}$$

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A} = \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( -\frac{j\omega\mu_0 p_0}{4\pi} \sin\theta e^{j\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{j\omega\mu_0 p_0}{4\pi r} \cos\theta e^{j\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)} \right) \right] \vec{u}_\phi,$$

$$\Leftrightarrow \vec{B} = \left[ \frac{\omega^2 \mu_0 p_0}{4\pi r c} \sin\theta e^{j\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)} + \frac{j\omega\mu_0 p_0}{4\pi r^2} \sin\theta e^{j\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)} \right] \vec{u}_\phi,$$

$$\Leftrightarrow \vec{B} = \frac{\omega^2 \mu_0 p_0}{4\pi r c} \sin\theta e^{j\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)} \left[ 1 + \frac{\lambda}{2\pi r} \right] \vec{u}_\phi, \text{ car } \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

Or on se place dans la zone de rayonnement  $r \gg \lambda$ , donc  $\frac{\lambda}{2\pi r} \ll 1$  et le champ magnétique prend l'expression finale :

$$\vec{B} = \frac{\omega^2 \mu_0 p_0}{4\pi r c} \sin\theta e^{j\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)} \vec{u}_\phi = B_\phi(r, \theta) \vec{u}_\phi.$$

Il reste à calculer le champ électrique  $\vec{E}$ . Pour le calculer, on utilise une équation de Maxwell dans laquelle les deux champs sont couplés :

Équation de Maxwell-Faraday :  $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$  ou,

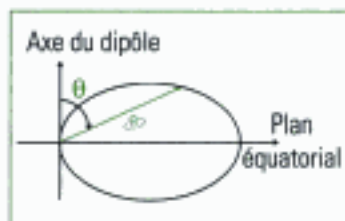
Équation de Maxwell-Ampère :  $\text{rot } \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ .

Comme on emploie la notation complexe, la dérivée temporelle se simplifie en un produit, mais les opérateurs d'analyse vectorielle ne se simplifient pas car l'amplitude du champ dépend de  $r$ . Ainsi, pour calculer le champ électrique  $\vec{E}$ , on se sert de l'équation de Maxwell-Ampère :

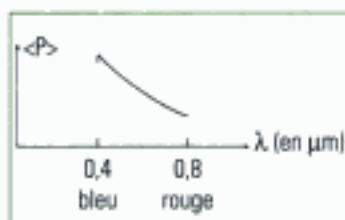
$\text{rot } \vec{B} = \frac{j\omega}{c^2} \vec{E}$ , soit  $\vec{E} = \frac{-jc^2}{\omega} \text{rot } \vec{B}$ . Il faut dériver le champ magnétique :

$$\vec{E} = \frac{-jc^2}{\omega} \begin{pmatrix} \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial (\sin\theta B_\phi)}{\partial \theta} \\ -\frac{1}{r} \frac{\partial (r B_\phi)}{\partial r} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Hidden page

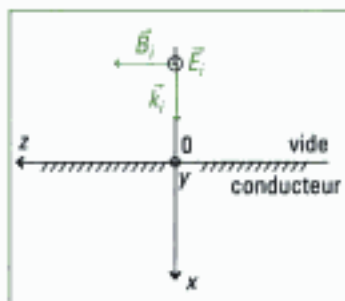


**Fig. 19** - Diagramme de rayonnement du dipôle oscillant. Dans un plan passant par l'axe Oz du dipôle, on trace  $\langle R \rangle$  en coordonnées polaires pour une distance  $r$  fixée.



**Fig. 20** - Puissance moyenne  $\langle P \rangle$  diffusée.

1. La longueur d'onde est plus grande pour le rouge, donc la fréquence est plus faible.



**Fig. 21** - Plan conducteur.

#### Propriété 10

Le vecteur de Poynting moyen  $\langle \vec{R} \rangle$  dépend de  $\theta$  : **le rayonnement de la puissance électromagnétique est anisotrope** (fig. 19).

Dans les directions  $\theta = 0$  et  $\theta = \pi$ , la puissance rayonnée est nulle, c'est-à-dire dans les directions de l'axe Oz colinéaire au dipôle rayonnant.

Dans les directions du plan Oxy, c'est-à-dire pour  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , le dipôle rayonne une puissance surfacique maximale.

Pour calculer la puissance moyenne totale  $\langle P \rangle$  rayonnée par le dipôle, il faut calculer le flux du vecteur de Poynting à travers une surface fermée qui entoure le dipôle. On choisit une sphère, surface particulièrement adaptée aux coordonnées du même nom :

$$\langle P \rangle = \oint_S \langle \vec{R} \rangle \cdot d\vec{S} = \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} \frac{\omega^4 \mu_0 p_0^2}{32\pi^2 r^2 c} \sin^2 \theta \vec{u}_r \cdot r^2 \sin \theta d\theta d\phi \vec{u}_r,$$

$$\langle P \rangle = \frac{\omega^4 \mu_0 p_0^2}{32\pi^2 c} \underbrace{\int_{\theta=0}^{\pi} \sin^3 \theta d\theta}_{\frac{4}{3}} \underbrace{\int_{\phi=0}^{2\pi} d\phi}_{2\pi}.$$

#### Propriété 11

La puissance moyenne rayonnée est proportionnelle à l'exposant 4 de la fréquence (fig. 20) :

$$\langle P \rangle = \frac{\omega^4 \mu_0 p_0^2}{12\pi c}.$$

Tous les atomes sont formés de protons ou d'électrons, certaines molécules sont polaires. Ainsi, on peut assimiler les molécules de l'air à des dipôles variables. Lorsqu'elles sont excitées, par le rayonnement solaire par exemple, les molécules composant l'atmosphère rayonnent une puissance plus importante dans le bleu que dans le rouge<sup>1</sup>. Ainsi, au lieu d'une couleur blanche que l'on observerait si l'atmosphère rayonnait une même puissance pour chaque couleur, le ciel laisse observer un bleu clair, car le rayonnement est dominant dans cette partie du spectre visible.

De même, nous voyons le soleil rouge au crépuscule, car les rayons lumineux qui nous parviennent ont traversé une large couche d'atmosphère. Ils y ont été absorbés. L'atmosphère rayonne plus d'énergie dans le violet que dans le rouge, et donc en absorbe plus. Le rayonnement direct contient alors plus d'énergie dans le rouge que dans le violet.

## I. Réflexion d'une OPPH sur un conducteur

On étudie le phénomène de réflexion d'une OPPH sur un conducteur parfait (fig. 21). L'OPPH incidente  $i$  arrive sous incidence normale depuis le demi-espace vide d'équation  $x < 0$  et rencontre la surface plane d'équation  $x = 0$  qui délimite le demi-espace conducteur  $x > 0$ .

Cette onde est définie par son vecteur d'onde  $\vec{k}_i$  et ses champs :

$$\begin{aligned} \vec{k}_i &= \frac{\omega}{c} \vec{u}_x, \\ \vec{E}_i &= E_{0i} e^{j(\omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{OM})} \vec{u}_y = E_{0i} e^{j\left(\omega t - \frac{\omega}{c} x\right)} \vec{u}_y, \\ \vec{B}_i &= \frac{\vec{k}_i \wedge \vec{E}_i}{\omega} = \frac{\vec{u}_x \wedge \vec{E}_i}{c} = \frac{E_{0i}}{c} e^{j\left(\omega t - \frac{\omega}{c} x\right)} \vec{u}_z. \end{aligned}$$



## 1.1. Nécessité d'une onde réfléchie

Pour montrer l'existence d'une onde réfléchie, on fait un raisonnement par l'absurde : on suppose qu'aucune onde réfléchie ne prend naissance lorsque l'onde incidente tombe sur le conducteur : seule l'onde incidente est présente.

On sait que dans un conducteur parfait, le champ électrique est nul.<sup>1</sup> Le champ électrique restant tangentiel à la surface d'équation  $x=0$  qui sépare le « milieu » vide du milieu conducteur, la condition de passage du champ électrique s'écrit :

$$\vec{E}_i(x=0,t) = E_{0i} e^{j\omega t} \vec{u}_y = \vec{0}, \text{ à tout instant.}$$

Cette proposition est impossible, tout comme l'hypothèse de l'absence d'une onde réfléchie.

### Propriété 12

Lorsqu'une OPPH tombe sur un conducteur parfait, elle engendre une densité surfacique de charges  $\sigma$  et de courant  $\vec{j}_s$  qui donnent naissance à une onde réfléchie.

## 1.2. Détermination de l'onde réfléchie

On note  $\omega'$  la pulsation de l'onde réfléchie,  $\vec{k}_r$  son vecteur d'onde et  $\vec{E}_r(x,t) = E_{0r} e^{j(\omega' t - \vec{k}_r \cdot \vec{OM})} \vec{u}$  son champ électrique, expression dans laquelle  $\vec{u}$  est un vecteur unitaire.

Si  $\vec{u} \neq \vec{u}_y$ , alors la condition de passage du champ reste impossible : la composante  $z$  du champ ne pouvant s'annuler pour toute date  $t$ .

Donc  $\vec{u} = \vec{u}_y$ . Posons  $\vec{k}_r = k_{rx} \vec{u}_x + k_{ry} \vec{u}_y + k_{rz} \vec{u}_z$ . La condition de passage du champ électrique prend la forme :

$$\vec{E}_i(x=0,t) + \vec{E}_r(x=0,y,z,t) = \vec{0}, \text{ soit :}$$

$$E_{0i} e^{j\omega t} + E_{0r} e^{j(\omega' t - k_{rx} x - k_{ry} y - k_{rz} z)} = 0 \text{ pour tout } y, z, \text{ ou } t.$$

En faisant  $t=0$  et  $y=0$ , on trouve  $k_{rx} = 0$ .

En faisant  $t=0$  et  $z=0$ , on trouve  $k_{ry} = 0$ .

Et compte tenu de ces deux résultats,  $E_{0i} e^{j\omega t} = -E_{0r} e^{j\omega' t}$  pour tout  $t$ .

Alors  $\omega' = \omega$  et  $E_{0r} = -E_{0i}$ . Le champ de l'onde réfléchie s'écrit donc :

$$\vec{E}_r = E_{0r} e^{j(\omega t - k_{rx} x)} \vec{u}_y.$$

Le champ de cette OPPH satisfait l'équation de d'Alembert et on en tire la relation de dispersion :

$$k_{rx}^2 = k_r^2 = \frac{\omega^2}{c^2}.$$

Le conducteur renvoie l'onde réfléchie dans le demi-espace vide, donc

$\vec{k}_r = -\frac{\omega}{c} \vec{u}_x$ , et le champ électrique de l'onde réfléchie devient enfin :

$$\vec{E}_r = -E_{0i} e^{j\left(\omega t + \frac{\omega}{c} x\right)} \vec{u}_y.$$

Le champ magnétique de l'onde réfléchie est alors donné par :

$$\vec{B}_r = \frac{\vec{k}_r \wedge \vec{E}_r}{\omega} = \frac{-\vec{u}_x \wedge \vec{E}_r}{c} = \frac{E_{0i}}{c} e^{j\left(\omega t + \frac{\omega}{c} x\right)} \vec{u}_z.$$

Hidden page

# L'essentiel

## ✓ Équation de d'Alembert

- C'est l'équation aux dérivées partielles satisfaite par le champ électrique  $\vec{E}$  (ou le champ magnétique  $\vec{B}$ ) dans le vide.

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}.$$

- Les solutions de l'équation de d'Alembert sont :

- les ondes progressives du type  $f\left(t - \frac{\vec{u} \cdot \vec{OM}}{c}\right)$  qui se déplacent à la vitesse  $c$  dans la direction et le sens du vecteur  $\vec{u}$ . C'est une solution à variables liées.
- les ondes stationnaires du type  $E(x,t) = E_0 \cos\left(\frac{\omega}{c} x + \psi\right) \cos(\omega t + \varphi)$  qui ne se propagent pas, l'énergie restant confinée entre les nœuds de vibration consécutifs. C'est une solution à variables séparées.

## ✓ OPPH (onde plane progressive harmonique)

- Le **vecteur d'onde** de l'OPPH est défini par :

$$\vec{k} = \frac{\omega}{c} \vec{u}.$$

Son module  $k$  est le nombre d'onde. Le vecteur d'onde donne la direction et le sens de la propagation.

- La **longueur d'onde**  $\lambda$  est donnée par :  $k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$ .

### • Structure de l'OPPH

Les champs électrique et magnétique sont transverses et orthogonaux. Le trièdre  $(\vec{k}, \vec{E}, \vec{B})$  est orthogonal direct. On a :

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} = \frac{\vec{u} \wedge \vec{E}}{c}, \quad \vec{E} = c^2 \frac{\vec{B} \wedge \vec{k}}{\omega} = c \vec{B} \wedge \vec{u}.$$

Ces expressions sont valables en complexe ou en réel.

### • Polarisation de l'OPPH :

- **Polarisation rectiligne** : l'extrémité du vecteur champ décrit un segment de droite lorsque le temps varie.
- **Polarisation elliptique** : l'extrémité du champ décrit une ellipse.
- **Polarisation circulaire** : l'extrémité du champ décrit un cercle.

La polarisation (elliptique ou circulaire) est « **gauche** » si l'ellipse (ou le cercle), est parcourue dans le sens trigonométrique, le schéma étant réalisé avec  $\vec{k}$  pointant vers l'observateur.

Si elle est parcourue dans le sens horaire, alors la polarisation est « **droite** ».

## ✓ Relation de dispersion

- C'est la relation entre le nombre d'onde  $k$  et la pulsation  $\omega$ . Elle découle de l'équation de propagation du champ.
- Pour les OPPH, il n'y a pas de dispersion car la relation est linéaire  $\frac{k}{\omega} = C^v$ .
- Dans certains milieux (plasmas) ou à cause de conditions aux limites (ondes guidées), la dispersion existe car la relation de dispersion est non linéaire, elle est du type  $k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{c^2}$ . Seules les ondes dont la pulsation est supérieure à  $\omega_0$  peuvent se propager.



Hidden page

## → Savoir-faire

❶ Le champ que l'on connaît est-il celui d'une OPPH ? Si oui, alors le champ inconnu est déterminé :

miné à partir du champ connu par l'une des relations  $\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} = \frac{\vec{u} \wedge \vec{E}}{c}$  ou  $\vec{E} = c^2 \frac{\vec{B} \wedge \vec{k}}{\omega} = c \vec{B} \wedge \vec{u}$ . Si le champ n'est pas celui d'une OPPH, alors passer à ❷.

❷ Au lieu des relations précédentes, il faut utiliser une équation de Maxwell « brute ». Pour éviter un système d'équations aux dérivées partielles, il faut prendre celle où figure le rotationnel du champ connu et la dérivée temporelle du champ inconnu. Si l'on cherche  $\vec{E}$ , alors on utilise l'équation de Maxwell-Ampère, et si l'on cherche  $\vec{B}$ , alors il faut se servir de l'équation de Maxwell-Faraday. Introduire, si ce n'est déjà fait, la notation complexe, exprimer la dérivée temporelle du champ inconnu, calculer le rotationnel du champ connu pour répondre à la question.

❸ Écrire le champ cherché en notation réelle, s'il est demandé.

## → Application

❶ Le champ connu est  $\vec{E}(x, z, t) = E_0 \sin(\alpha x) \cos(\omega t - kz) \vec{u}_y$ , sa notation complexe est  $\vec{E}(x, z, t) = E_0 \sin(\alpha x) e^{j(\omega t - kz)} \vec{u}_y$ . C'est un champ électrique dont l'amplitude  $E_0 \sin(\alpha x)$  dépend d'une coordonnée. Ce n'est donc pas le champ d'une OPPH et les relations simplificatrices ne peuvent pas être utilisées. On passe donc à ❷.

❷ On cherche le champ magnétique  $\vec{B}$  : il faut alors se servir de l'équation de Maxwell-Faraday :  $\text{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ . Cette équation permet d'exprimer directement l'inconnue en notation complexe :  $\text{rot} \vec{E} = - j\omega \vec{B}$ .

⚠ On n'a pas  $\text{rot} \vec{E} = - j\vec{k} \wedge \vec{E}$  car le champ ne dépend pas des coordonnées spatiales de manière exponentielle uniquement. Cette simplification ne peut être écrite que pour une OPPH, alors que l'utilisation de  $\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \times j\omega$  est valable en notation complexe dès que le champ réel est une fonction sinusoïdale du temps.

On a donc ici :

$$\vec{B} = \frac{j}{\omega} \text{rot} \vec{E} = \frac{j}{\omega} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ E_0 \sin(\alpha x) e^{j(\omega t - kz)} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{j}{\omega} \begin{pmatrix} jk E_0 \sin(\alpha x) e^{j(\omega t - kz)} \\ 0 \\ \alpha E_0 \cos(\alpha x) e^{j(\omega t - kz)} \end{pmatrix}$$

❸ L'expression réelle  $\vec{B}$  du champ est la partie réelle de  $\vec{B}$  :

$$\vec{B} = \frac{1}{\omega} \begin{pmatrix} -k E_0 \sin(\alpha x) \cos(\omega t - kz) \\ 0 \\ -\alpha E_0 \cos(\alpha x) \sin(\omega t - kz) \end{pmatrix}$$



## Méthode n° 2

### Comment déterminer l'état de polarisation d'un champ d'une onde électromagnétique ?

On donne le champ magnétique d'une onde électromagnétique qui se propage dans le vide :

$$\vec{B}(x, z, t) = B_0 e^{j(\omega t + ky)} \vec{u}_x + B_0 e^{j(\omega t + ky + \frac{\pi}{2})} \vec{u}_z. \text{ Déterminer son état de polarisation.}$$

#### → Savoir-faire

- ❶ Écrire l'expression réelle du champ. S'il n'a qu'une composante ou si le rapport de ses deux composantes est une constante, alors la polarisation est rectiligne dans la direction du vecteur unitaire  $\vec{u}$  qui dirige le champ :  $\vec{u} = \frac{\vec{\text{champ}}}{\|\vec{\text{champ}}\|}$ . Sinon, passer à ❷.
  - ❷ Écrire le vecteur d'onde  $\vec{k}$ . Si le champ n'est pas orthogonal à  $\vec{k}$  ou varie dans un plan orthogonal à  $\vec{k}$  en fonction d'une ou plusieurs coordonnées d'espace, alors l'onde n'est pas plane et l'état de polarisation ne peut pas être trouvé ou n'est pas un des états définis dans le cours. On a en effet défini la polarisation uniquement pour une OPPH. Si le champ est une OPPH, alors passer à ❸.
  - ❸ Le champ est inclus dans un plan orthogonal à  $\vec{k}$ . On cherche donc à le représenter dans le plan de la feuille, en plaçant  $\vec{k}$  dirigé vers nous (vers l'observateur). Il possède deux composantes  $C_1$  et  $C_2$  selon deux directions 1 et 2 (généralement les directions  $x, y$  ou  $z$ ). Si les composantes  $C_1$  et  $C_2$  sont déphasées (temporellement) d'un angle autre que  $\pm \frac{\pi}{2}$  ou sont d'amplitude inégale, alors la polarisation est elliptique. Si elles sont d'amplitude égale et déphasées de  $\pm \frac{\pi}{2}$ , alors on peut écrire  $C_1^2 + C_2^2 = \text{constante}$ . C'est une équation de cercle et la polarisation est circulaire.
- Pour déterminer le sens de la polarisation, représenter le champ à deux instants consécutifs tels qu'il a effectué un quart de tour, par exemple aux instants tels que  $\omega t = 0$  et  $\omega t = \frac{\pi}{2}$  (le champ a fait un tour lorsque  $\omega t = 2\pi$ ).
- Le sens du quart de tour effectué donne le sens de la polarisation, « droite » ou « gauche ».

#### → Application

- ❶ L'expression réelle du champ est :

$$\vec{B}(x, z, t) = B_0 \cos(\omega t + ky) \vec{u}_x - B_0 \sin(\omega t + ky) \vec{u}_z.$$

Ce champ possède deux composantes  $B_x$  et  $B_z$ , dont le rapport est :

$$\frac{B_z}{B_x} = \frac{\sin(\omega t + ky)}{\cos(\omega t + ky)} = \tan(\omega t + ky).$$

Ce rapport n'est pas constant, la polarisation n'est donc pas rectiligne.

- ❷ La phase s'écrit  $\phi = \omega t + ky = \omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM}$ . Il vient donc  $\vec{k} = -k\vec{u}_y$  (propagation vers les  $y < 0$ ). Un plan orthogonal à  $\vec{k}$  est un plan d'équation  $y = \text{constante}$ . Dans un tel plan, le champ ne dépend plus des coordonnées et l'onde est plane.

- ❸ Les deux composantes sont déphasées de  $\frac{\pi}{2}$  et ont une amplitude égale, la polarisation est donc circulaire. Pour connaître son sens, on trace le vecteur champ aux deux instants consécutifs  $\omega t = 0$  et  $\omega t = \frac{\pi}{2}$  dans un plan  $y = \text{constante} = 0$  (c'est le cas le plus simple) en plaçant l'axe  $Oy$  vers le « fond » de la feuille, c'est-à-dire que  $\vec{k}$  vient vers notre œil.

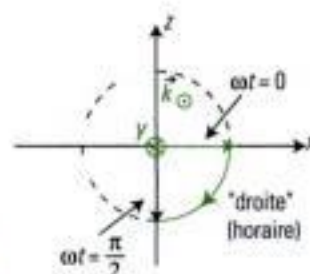


On a  $\vec{B}(\omega t = 0, y = 0) = B_0 \vec{u}_x$  et  $\vec{B}(\omega t = \frac{\pi}{2}, y = 0) = -B_0 \vec{u}_x$ .

On s'aperçoit alors que le sens de la polarisation suit le sens fléché, soit une polarisation « droite » car la rotation a lieu dans le sens horaire.



On dit que le sens horaire correspond à une polarisation « droite » : il faut imaginer que le cercle est un volant que l'on tourne dans le sens horaire, la voiture tire alors bien vers la droite.



### Méthode n° 3

## Comment déterminer une relation de dispersion ?

### → Problème à résoudre n° 1

On donne le champ électrique d'une onde électromagnétique qui se propage dans le vide :  $\vec{E}(x, z, t) = E_0 \sin(\alpha x) \cos(\omega t - k z) \vec{u}_y$ . Écrire le vecteur d'onde et déterminer la relation de dispersion.

### → Savoir-faire

❶ Pour déterminer la relation de dispersion, il faut connaître l'équation aux dérivées partielles satisfaite par le champ (c'est l'équation « de propagation », dont l'équation de d'Alembert est un exemple fondamental) et l'expression du champ dans laquelle on reconnaît le nombre d'onde et la pulsation. Pour écrire le vecteur d'onde, il faut identifier la phase : c'est l'argument de la sinusoïde ou de l'exponentielle qui contient  $\omega t$ . On trouve le vecteur d'onde  $\vec{k}$  en identifiant la phase à  $\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM}$ , on en déduit alors le nombre d'onde  $k = \|\vec{k}\|$ .

❷ Introduire l'expression du champ dans son équation de propagation : l'équation qui reste après simplifications est la relation de dispersion qui donne le lien entre la pulsation  $\omega$  et le nombre d'onde identifié en ❶.

### → Application

❶ La phase du champ est  $\omega t - k z$ , que l'on identifie à  $\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM}$  si  $\vec{k} = k \vec{u}_z$ , avec  $\vec{OM} = x \vec{u}_x + y \vec{u}_y + z \vec{u}_z$ . Le nombre d'onde est donc  $k$  et les notations sont conformes à celles « classiquement » adoptées.

❷ L'onde se propage dans le vide. Son champ électrique satisfait donc l'équation de d'Alembert  $\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$ . On introduit dans cette équation l'expression du champ qui est donnée par l'énoncé :

$$\Delta \vec{E} = \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} = (-\alpha^2 - k^2) \vec{E}, \quad \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\omega^2 \vec{E}.$$

Il reste donc l'équation  $-\alpha^2 - k^2 - \left(\frac{-\omega^2}{c^2}\right) = 0$ , soit :

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \alpha^2.$$



L'utilisation de la notation complexe n'est pas obligatoire ici, mais est préférable. Elle peut se révéler moins calculatoire que la notation réelle dans la démarche proposée, et mène toujours au résultat, alors que l'utilisation de la notation réelle ne permet parfois pas d'aboutir (voir problème suivant).



## → Problème à résoudre n° 2

On donne l'équation de propagation du champ électrique dans un milieu matériel homogène et isotrope :  $\Delta \vec{E} - \beta \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{0}$ . Déterminer la relation de dispersion dans ce milieu.

### → Savoir-faire

- ❶ Pour déterminer la relation de dispersion, il faut connaître l'équation aux dérivées partielles satisfaite par le champ (c'est l'équation \* de propagation \*, dont l'équation de d'Alembert est un exemple fondamental) et l'expression du champ dans laquelle on reconnaît le nombre d'onde et la pulsation. Le champ n'étant pas donné, on écrit celui d'une OPPH qui se propage dans une direction donnée (un axe de coordonnées, par exemple), en y faisant figurer la pulsation et le nombre d'onde  $k$  (sans écrire  $k = \frac{\omega}{c}$  qui est déjà une relation de dispersion !).
- ❷ Introduire l'expression du champ dans son équation de propagation : l'équation qui reste après simplifications est la relation de dispersion qui donne le lien entre la pulsation  $\omega$  et le nombre d'onde  $k$  identifié en ❶.

### → Application

❶ L'énoncé donne l'équation de propagation, mais il manque l'expression du champ. On prendra donc le champ électrique d'une OPPH se propageant dans la direction de l'axe  $x'x$ . Le vecteur d'onde est  $\vec{k} = k\vec{u}_x$  et le champ s'écrit :

$$\vec{E}(x,t) = \vec{E}_0 e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{M})} = \vec{E}_0 e^{j(\omega t - kx)}.$$

❷ On injecte cette expression dans l'équation de propagation :

$$\Delta \vec{E} = \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} = -k^2 \vec{E}, \quad \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = j\omega \vec{E}, \text{ il vient donc :}$$

$$(-k^2 - \beta j\omega) \vec{E} = \vec{0}, \text{ soit } k^2 = -\beta j\omega.$$

On a souligné le nombre d'onde car on s'aperçoit qu'il est nécessairement complexe, son carré l'étant.



Il était ici obligatoire d'utiliser la notation complexe du champ, car une dérivée première par rapport à une variable d'espace temps (ici le temps) est présente. Si on avait pris la notation réelle du champ, on n'aurait pas pu retrouver l'expression du champ après l'avoir dérivé une seule fois (la dérivée première d'un cosinus est un sinus, sa dérivée seconde est un cosinus).

## Méthode n° 4

**Comment connaître l'existence de la propagation d'une onde selon la valeur de sa fréquence, et la manière dont la propagation a lieu lorsqu'elle s'opère ?**

### → Problème à résoudre n° 1

On donne le champ électrique d'une onde électromagnétique qui se propage dans le vide :

$\vec{E}(x,z,t) = E_0 \sin(\alpha x) \cos(\omega t - kz) \vec{u}_y$ . Quelles sont les fréquences des ondes qui peuvent se propager dans ce milieu, et lorsqu'elle est possible, comment a lieu cette propagation ?

## → Savoir-faire

- ❶ Déterminer la relation de dispersion (voir méthode n° 2).
- ❷ Calculer le nombre d'onde  $k$ . C'est *a priori* un complexe. Déterminer sa partie réelle et sa partie imaginaire, en discutant éventuellement en fonction des valeurs de la pulsation. Écrire l'expression réelle du champ.
- ❸ Si sa partie réelle est non nulle, alors la propagation a lieu. Lorsqu'elle a lieu, examiner la partie imaginaire. Si elle est nulle, alors la propagation se fait sans atténuation, si elle est non nulle, alors la propagation se fait avec atténuation progressive de l'onde. Vérifier cette conclusion en interprétant l'expression réelle du champ.



Si on constate une amplification à la place d'une atténuation, alors vérifier les signes dans les calculs. Une onde dont l'amplitude augmente lors de sa propagation gagne de l'énergie en se propageant, ce qui reste à vérifier dans l'énoncé, car ceci est très exceptionnel (c'est le cas dans la cavité d'un émetteur laser, par exemple !)

## → Application

❶ La méthode n° 2 a établi la relation de dispersion :  $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \alpha^2$ .

❷ La pulsation est positive.

• Si  $\omega > \alpha c$ , alors  $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \alpha^2 > 0$  et  $k$  est réel :

$$k = \pm \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \alpha^2}. \text{ Le champ s'écrit donc : } \vec{E} = E_0 \sin(\alpha x) e^{j\left(\omega t \mp \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \alpha^2} z\right)} \vec{u}_y,$$

$$\text{soit : } \vec{E} = E_0 \sin(\alpha x) \cos\left(\omega t \mp \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \alpha^2} z\right) \vec{u}_y.$$

• Si  $\omega < \alpha c$ , alors  $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \alpha^2 < 0$  et  $k$  est imaginaire pur :

$$k = \pm j \sqrt{\alpha^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}. \text{ Le champ s'écrit : } \vec{E} = E_0 \sin(\alpha x) e^{\pm j\left(\alpha^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right) z} e^{j\omega t} \vec{u}_y,$$

$$\text{soit : } \vec{E} = E_0 \sin(\alpha x) \cos(\omega t) e^{\pm \left(\alpha^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right) z} \vec{u}_y.$$

❸ • Lorsque  $\omega > \alpha c$ , la propagation a lieu car le nombre d'onde  $k$  possède une partie réelle (la phase est \* à variables liées \*). Il n'a pas de partie imaginaire, l'amplitude du champ ne varie donc pas lorsque la propagation a lieu, c'est-à-dire lorsque  $z$  varie. La propagation a donc lieu sans atténuation (ni amplification).

• Lorsque  $\omega \leq \alpha c$ , le nombre d'onde  $k$  est un imaginaire pur : il n'y a donc pas propagation.

## → Problème à résoudre n° 2

On donne l'équation de propagation du champ électrique dans un milieu matériel homogène et isotrope :  $\Delta \vec{E} - \beta \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{0}$ . Quelles sont les fréquences des ondes qui peuvent se propager dans ce milieu, et lorsqu'elle est possible, comment a lieu cette propagation ?



## → Application

❶ La relation de dispersion est (voir méthode n° 2) :  $\underline{k}^2 = -\beta j\omega$ .

❷ On remarque que  $\underline{k}^2 = \beta\omega e^{-j\frac{\pi}{2}} = \left[ \pm \sqrt{\beta\omega} e^{-j\frac{\pi}{4}} \right]^2 = \left[ \pm(1-j) \sqrt{\frac{\beta\omega}{2}} \right]^2$ .

On a donc  $\underline{k} = k_r + jk_i$  avec :

$$k_r = \pm \sqrt{\frac{\beta\omega}{2}} \text{ et } k_i = \mp \sqrt{\frac{\beta\omega}{2}}.$$

Le champ s'écrit :  $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{j(\omega t - kx)} = \vec{E}_0 e^{j(\omega t - (k_r + jk_i)x)} = \vec{E}_0 e^{k_i x} e^{j(\omega t - k_r x)}$ ,

soit  $\vec{E}(x, t) = \vec{E}_0 e^{k_i x} \cos(\omega t - k_r x) = \vec{E}_0 e^{\pm \sqrt{\frac{\beta\omega}{2}} x} \cos\left(\omega t \mp \sqrt{\frac{\beta\omega}{2}} x\right)$ .

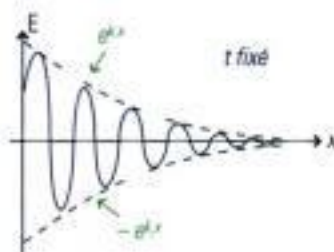
❸ La phase est « à variables liées », du fait de l'existence de la partie réelle du nombre d'onde, et cela pour toute pulsation : toutes les fréquences donnent des ondes qui se propagent dans ce milieu.

Lors de la propagation, vers les  $x > 0$  par exemple, le champ s'écrit :

$$\vec{E}(x, t) = \vec{E}_0 e^{-\sqrt{\frac{\beta\omega}{2}} x} \cos\left(\omega t - \sqrt{\frac{\beta\omega}{2}} x\right).$$

Si  $x$  croît, alors l'amplitude du champ décroît, car c'est une exponentielle décroissante de  $x$  : **l'onde est amortie lors de sa propagation**. L'amortissement est lié au fait que la partie imaginaire du nombre d'onde est non nulle.

Sur le schéma ci-contre, on donne l'évolution « de principe » (la courbe n'est pas le tracé du champ ci-dessus, mais simplement l'allure d'un champ lorsque le nombre d'onde est complexe) du champ en traçant son évolution en fonction de  $x$  à une date  $t$  fixée, lorsque la propagation a lieu vers les  $x > 0$ .



# Exercices

## Niveau 1

### Ex. 1

1) Écrire le champ électrique  $\vec{E}$  et le vecteur d'onde  $\vec{k}$  d'une onde électromagnétique plane progressive sinusoïdale d'amplitude  $E_0$  se propageant dans la direction de la droite du plan  $Oxy$  d'équation  $y = x \tan \alpha$ , dans le sens des  $x$  croissants et polarisée rectilignement selon l'axe  $Oz$ .

2) En déduire l'expression du champ magnétique  $\vec{B}$  associé.

### Ex. 2

1) Écrire le champ électrique  $\vec{E}$  et le vecteur d'onde  $\vec{k}$  d'une onde électromagnétique plane progressive sinusoïdale d'amplitude  $E_0$  se propageant le long de l'axe  $Ox$  vers les  $x$  croissants et polarisée circulairement droite.

2) En déduire l'expression du champ magnétique  $\vec{B}$  associé.

3) Déterminer le vecteur de Poynting de cette onde et sa moyenne temporelle.

### Ex. 3

On prend  $k > 0$ . Déterminer l'état de polarisation des ondes suivantes. Donner les expressions du champ magnétique et du vecteur de Poynting.

1)  $E_x = E_0 \cos(\omega t + ky)$ ,  $E_z = -E_0 \sin(\omega t + ky)$ .

2)  $E_x = E_0 e^{j(\omega t + kz)}$ ,  $E_y = E_0 e^{j(\omega t + kz + \frac{\pi}{3})}$ .

3)  $E_y = E_0 \cos(\omega t - kx)$ ,  $E_z = E_0 \sin(\omega t - kx)$ .

4)  $E_x = E_0 \cos\left(\omega t - kx + \frac{\pi}{3}\right)$ ,  
 $E_z = E_0 \cos\left(\omega t - kx + \frac{\pi}{3}\right)$ .

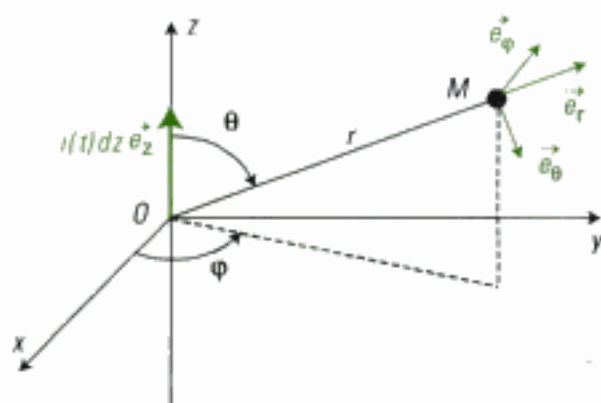
### Ex. 4

L'atmosphère terrestre est considérée comme un milieu dont les propriétés sont celles du vide : permittivité  $\epsilon_0$  et perméabilité  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$ .

Un élément de conducteur de longueur  $dz$  parcouru par un courant  $i(t)$ , placé sur l'axe  $Oz$  au point origine  $O$  de l'espace crée, en un point  $M$  repéré par ses coordonnées sphériques  $(r, \theta, \varphi)$  un potentiel vec-

teur :  $d\vec{A}(M, t) = \frac{\mu_0 i}{4\pi r} \left(t - \frac{r}{c}\right) dz \vec{e}_z$  où  $c$  est la vitesse

de la lumière dans le vide.



1) Le courant  $i(t) = I \cos(\omega t)$  est sinusoïdal de pulsation  $\omega$  et d'amplitude  $I$ . Donner en notation complexe, l'expression  $d\vec{A}$  du potentiel vecteur en  $M$  en introduisant le nombre d'onde  $k = \frac{\omega}{c}$ .

2) Le potentiel vecteur créé par un dipôle oscillant est de la forme  $\vec{A}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \frac{d\vec{p}}{dt} \left(t - \frac{r}{c}\right)$ .

Déterminer le dipôle oscillant  $\vec{p}$  équivalent à l'élément de conducteur.

3) Identifier parmi les deux expressions données en notation complexe ci-dessous, celle du champ magnétique  $d\vec{B}$  et celle du champ électrique  $d\vec{E}$  créés au point  $M$  par l'élément de courant :

$$jk\omega \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{e^{j(\omega t - kr)}}{r} \sin(\theta) dz \vec{e}_\theta$$

$$jk \frac{I}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{e^{j(\omega t - kr)}}{r} \sin(\theta) dz \vec{e}_\varphi$$

4) Vérifier que le champ électromagnétique possède, dans ces conditions et localement, la structure d'une onde plane progressive qui se propage dans la direction de  $\vec{e}_r$ .

## Niveau 2

### Ex. 5

Une onde monochromatique plane, polarisée rectilignement suivant l'axe  $Oz$ , se propage dans le vide dans la direction des  $x$  croissants. L'amplitude du champ électrique est  $E_m = 0,3 \text{ V/m}$  et sa fréquence  $f = 150 \text{ MHz}$ . On suppose que la valeur maximale du champ électrique  $\vec{E}$  est atteinte au point  $x = 25 \text{ cm}$  à l'instant pris comme origine.

1) Calculer la longueur d'onde.

2) Donner l'expression du champ électrique complexe et réel.

3) En déduire l'expression du champ magnétique complexe et réel.



- Déterminer la valeur moyenne du vecteur de Poynting.
- Un écran de surface  $S = 4 \text{ cm}^2$  est placé perpendiculairement à la direction de propagation. Calculer la puissance moyenne reçue par l'écran.

### Ex. 6

On considère la superposition de deux OPPH de même pulsation. Leur champ réel a pour amplitude  $E_0$  à l'origine du repère et à  $t = 0$ . La première se propage vers les  $x > 0$  et est polarisée circulairement droite, l'autre se propage vers les  $x < 0$  et est polarisée circulairement gauche.

- Déterminer les expressions complexes des champs électrique et magnétique de chacune des ondes.
- En déduire les expressions des champs électrique et magnétique résultants.
- Calculer le vecteur de Poynting de l'onde résultante, puis sa moyenne temporelle.
- Caractériser l'onde résultante : propagation, état de polarisation.

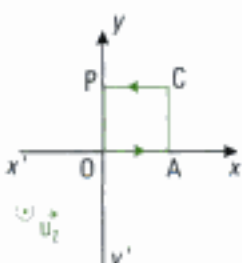
### Ex. 7

On étudie la réception d'une OPPH par une antenne dans le vide. On considère une OPPH polarisée rectilignement selon l'axe  $y'y$  et de pulsation  $\omega$ , qui se propage selon la direction de l'axe  $x'x$  vers les  $x$  croissants et a une amplitude maximale  $E_0$  à l'instant  $t = 0$  au point d'abscisse  $x = 0$ .

- Déterminer les expressions des champs électrique et magnétique en tout point.
- On considère l'antenne rectiligne d'un tuner. Sa longueur est  $a$  et cette antenne est élément du plan  $xOy$ , fait avec  $Ox$  un angle  $\theta$ , et s'appuie sur le point  $O$ . Quelle est l'amplitude de la tension  $U$  présente dans l'antenne en fonction des données ?



- Il existe aussi des antennes enroulées le long d'un cadre carré non fermé du plan  $Oxy$ , de côtés de longueur  $a$  confondus avec les axes de coordonnées, et dont  $O$  est un coin. Déterminer de deux manières différentes l'amplitude de la tension  $U$  présente dans l'antenne en fonction des données.



### Ex. 8 Émission d'une onde non plane, limite de l'OPPH

Une onde non plane est émise par une station se trouvant à une grande distance  $L$  de l'antenne où elle

est reçue. On note  $a$  la taille de cette antenne. La station émet une puissance moyenne  $P$  de manière isotrope dans le demi-espace vide au-dessus du sol.

- Montrer que l'on a affaire à une onde plane au niveau de l'antenne.
- Exprimer la moyenne temporelle du module du vecteur de Poynting en fonction de l'amplitude  $E_0$  du champ électrique.
- En déduire l'expression de  $E_0$  en fonction des données.

### Ex. 9

On considère la propagation d'une onde électromagnétique dans un milieu tel que l'équation de propagation pour le champ (ici électrique) est :

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} - \alpha \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \beta \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0},$$

avec  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ .

- Dans quelle direction a lieu la propagation ? En déduire l'expression du vecteur d'onde en fonction du nombre d'onde  $k$ .
- Établir la relation de dispersion.
- On suppose la relation  $\alpha \ll |\beta| \omega$  vérifiée. Discuter les possibilités de propagation de l'onde dans ces conditions.
- On suppose maintenant la relation  $\alpha \gg |\beta| \omega$  vérifiée. Discuter les possibilités de propagation de l'onde dans ces conditions.

### Ex. 10 Propagation dans l'ionosphère

Une onde électromagnétique plane, progressive, monochromatique polarisée rectilignement dans la direction  $\vec{e}_x$ , se propage dans une direction  $Oz$  dans l'ionosphère, qui est l'ensemble des couches atmosphériques situées entre 60 km et 300 km d'altitude. Ces dernières se modélisent en un gaz ionisé (plasma) occupant un milieu transparent de permittivité  $\epsilon_0$  et de perméabilité  $\mu_0$ .

Ce plasma, électriquement neutre, est constitué d'ions pratiquement immobiles et d'électrons, supposés non relativistes, de charge  $-e = -1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$  et de masse  $m = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ .

Bien que la structure de l'ionosphère soit complexe, nous supposons que le nombre d'électrons par unité de volume est uniforme et égal à  $N = 10^{12} \text{ m}^{-3}$ .

En outre, nous admettrons que les interactions entre particules ainsi que leur agitation thermique peuvent être négligées.

- Montrer que l'on peut négliger la force magnétique et donner l'expression, en notation complexe, de la vitesse  $\vec{v}_e$  des électrons ionosphériques dans le champ électromagnétique de l'onde.
- En déduire le vecteur densité de courant de conduction  $\vec{j}$  créé par ce champ.



Hidden page

### Ex. 14

On considère le champ électrique  $\vec{E}$  d'une onde électromagnétique se propageant dans le vide. Son expression complexe est, dans la base cartésienne  $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$  :

$$\vec{E} = E_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{j(\omega t - kx)} \vec{u}_y,$$

$k$  étant un réel positif ou négatif.

1) Quels sont la direction et le sens de propagation de cette onde ? Écrire son vecteur d'onde en fonction des données.

2) Étude de la propagation.

2a) Établir la relation de dispersion, en faisant apparaître  $c$ .

2b) Tracer la courbe  $k = f(\omega)$ .

2c) À quelle condition sur  $\omega$  l'onde peut-elle effectivement se propager ? Y a-t-il alors amortissement de cette onde ?

3) Champ magnétique.

3a) Déterminer l'expression complexe  $\vec{B}$  du champ magnétique de cette onde. En déduire son expression réelle  $\vec{B}$ .

3b) Le trièdre  $(\vec{E}, \vec{B}, \vec{k})$  est-il orthogonal ? Interpréter.

4) Déterminer l'expression du vecteur de Poynting  $\vec{R}$  de cette onde.

5) Calculer la densité volumique d'énergie  $\frac{dW}{d\tau}$  transportée par cette onde.

6) Définir et calculer la vitesse de phase  $v_p$ . Exprimer le rapport  $\frac{v_p}{c}$  en fonction de  $c$ ,  $a$  et  $\omega$ . Commenter.

7) Définir et calculer la vitesse de groupe  $v_g$ . Exprimer le rapport  $\frac{v_g}{c}$  en fonction de  $c$ ,  $a$  et  $\omega$ .

Commenter.

### Ex. 15

1) Étude des champs de quelques ondes polarisées : on considère trois ondes électromagnétiques planes sinusoïdales (harmoniques) se propageant dans la direction de l'axe  $x'x$  et polarisées de différentes manières. On note  $\omega$  leur pulsation,  $k$  leur nombre d'onde et  $\lambda$  leur longueur d'onde. On suppose de plus que les champs électriques ont tous pour amplitude  $E_0$  et valent  $E_0 \vec{u}_y$  à  $t = 0$  au point  $O$  origine du repère.

1a) Donner et justifier les expressions du champ électrique complexe  $\vec{E}_1$  et réel  $\vec{E}_1$  de l'onde (1) en un point  $M(x, y, z)$  à l'instant  $t$ , sachant qu'elle est polarisée circulairement droite et se propage dans le sens  $xx'$ .

1b) En déduire l'expression de son champ magnétique réel  $\vec{B}_1$  et complexe  $\vec{B}_1$  au point  $M$ .

1c) Le champ électrique de l'onde (2) s'écrit au point  $M$  :

$$\vec{E}_2 = E_0 \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-jkx} \\ -je^{-jkx} \end{pmatrix} e^{j\omega t}.$$

Écrire son expression réelle. Donner l'état de polarisation de cette onde et son sens de propagation.

1d) En déduire l'expression du champ magnétique réel  $\vec{B}_2$  et complexe  $\vec{B}_2$  de cette onde en  $M$ .

1e) L'onde (3) se propage dans le sens positif de l'axe  $x'x$  et sa polarisation est circulaire droite. Donner et justifier les expressions de son champ électrique complexe  $\vec{E}_3$  et réel  $\vec{E}_3$  au point  $M$ .

1f) En déduire l'expression de son champ magnétique réel  $\vec{B}_3$  et complexe  $\vec{B}_3$  en  $M$ .

2) Étude de la superposition des ondes (1) et (2).

2a) Écrire l'expression au point  $M$  du champ électrique complexe  $\vec{E}$  résultant de la superposition de ces deux ondes.

2b) Écrire l'expression du champ magnétique complexe  $\vec{B}$  de cette onde.

2c) Déterminer l'expression du vecteur de Poynting de cette onde. Interpréter.

2d) Déduire des questions précédentes la nature de l'onde obtenue, ainsi que son état de polarisation.

3) Étude de la superposition des ondes (1) et (3).

3a) Écrire l'expression au point  $M$  du champ électrique complexe  $\vec{E}$  résultant de la superposition de ces deux ondes.

3b) Calculer son module et discuter sa direction à une abscisse  $x$  fixée.

3c) Écrire l'expression réelle du champ électrique. Interpréter sa propagation et conclure quant à la structure de cette onde.

### Ex. 16

L'espace est rapporté à un repère orthonormé  $Oxyz$  direct, de base  $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ . On se propose, dans ce problème, d'étudier la propagation d'une onde guidée. Pour cela, on considère le volume délimité par quatre plans infiniment conducteurs d'équation  $x = 0$ ,  $x = a$ ,  $z = 0$  et  $z = a$ . Ces quatre plans délimitent donc le « guide d'onde » de section carrée, qui est couplé à un générateur haute fréquence entretenant une onde progressive de pulsation  $\omega$  dont le vecteur champ électrique  $\vec{E}$  a pour composantes :

$$\vec{E} \begin{cases} E_x = 0 \\ E_y = 0 \\ E_z = E_0 \sin(k_1 x) \cos(\omega t - k_2 y) \end{cases}$$

où  $k_1$ ,  $k_2$  et  $\omega$  sont réels. Dans les questions 1) et 2), le milieu intérieur au guide est le vide, dont les constantes vous sont connues.

1a) Donner les équations de Maxwell. Établir l'équation de propagation pour  $\vec{E}$ .

Hidden page



$$\vec{E} = -\frac{\mu_0 q \omega^2}{4\pi r} \left[ \vec{OP} \left( t - \frac{r}{c} \right) \wedge \vec{u}_r \right] \wedge \vec{u}_r \text{ et}$$

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0 q \omega^2}{4\pi r c} \left[ \vec{OP} \left( t - \frac{r}{c} \right) \wedge \vec{u}_r \right].$$

2)a) Calculer le champ électromagnétique.

2)b) Quelle est la polarisation du champ électrique de l'onde en  $M$  ?

2)c) Donner l'expression du vecteur d'onde  $\vec{k}$ .

3) Étude énergétique.

3)a) Calculer la moyenne temporelle  $\langle R \rangle$  du module du vecteur de Poynting.

3)b) En déduire la puissance moyenne  $P$  rayonnée par la charge à travers une sphère de centre  $O$  et de rayon  $r$ .

3)c) Dans quelle direction préférentielle la charge émet-elle de l'énergie ?

4) Désormais, le dipôle n'est plus excité. L'amplitude  $a(t)$  du dipôle décroît lentement dans le temps. La masse du dipôle est égale à  $m$ .

4)a) En effectuant un bilan de puissance, déterminer l'équation différentielle vérifiée par  $a$ .

4)b) Déterminer l'évolution de  $a$  en fonction du temps en prenant  $a(t=0) = a_0$ .

4)c) En déduire la valeur de la durée  $t_1$  pour que cette amplitude soit divisée par 150. Conclure sachant que la pulsation du mouvement est  $\omega = 10^{16} \text{ rad.s}^{-1}$ ,  $q = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ ,  $m = 9 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$  et  $\mu_0 = 4 \pi \cdot 10^{-7} \text{ S.I.}$

## Indications

### Ex. 7

2) La différence de potentiel  $U$  est obtenue par la circulation du champ électrique :  $U = \int_{\text{antenne}} \vec{E} \cdot d\vec{l}$ .

### Ex. 8

1) Vérifier l'invariance suivant deux directions orthogonales afin de prouver le caractère plan de l'onde.

### Ex. 11

3) On utilise les expressions des questions précédentes en les adaptant à un dipôle dirigé suivant  $\vec{u}_r$ .

### Ex. 12

2) On utilise l'équation de Maxwell-Gauss.

4) On utilisera la question 2) afin de simplifier l'expression.

### Ex. 13

2) On donne l'expression du laplacien dans les coordonnées sphériques d'un vecteur :

$$\vec{\Delta} = A(r)\vec{u}_r : \Delta \vec{A} = -\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rA(r))\vec{u}_r$$

Etudier la fonction  $F(r, t) = rE(r, t)$ .

### Ex. 17

8) Il faut utiliser la définition de la vitesse de phase donnée en cours avec un vecteur d'onde complexe.

# Solutions des exercices

## Exercices de niveau 1

### Exercice 1

1) Le vecteur  $\vec{k}$  détermine la direction et le sens de propagation de l'onde.

Ce vecteur possède une composante positive suivant l'axe  $Ox$  et fait un angle  $\alpha$  avec cet axe puisque  $y = x \tan \alpha$ . On le trace dans le repère cartésien afin d'en déduire les composantes :

On obtient  $\vec{k} = k(\cos \alpha \vec{u}_x + \sin \alpha \vec{u}_y)$ .

Le champ électrique d'une onde plane progressive sinusoïdale en un point  $M$  est de la forme :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM})},$$

où  $O$  est le centre du repère cartésien.

L'onde est polarisée rectilignement selon l'axe  $Oz$  donc le champ électrique est dirigé suivant  $\vec{u}_z$ .

On en déduit  $\vec{E} = E_0 e^{j(\omega t - k \cos \alpha x - k \sin \alpha y + \varphi)} \vec{u}_z$  où  $\varphi$  représente la phase à l'origine du champ électrique.

Ceci donne en notation réelle :  $\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - k \cos \alpha x - k \sin \alpha y + \varphi) \vec{u}_z$ .

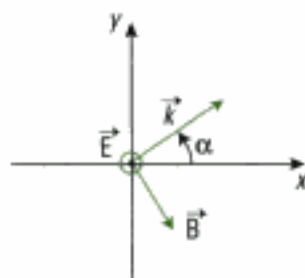
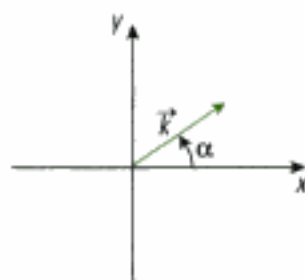
2) On met en œuvre la méthode n° 1.

L'onde est une OPPH donc :

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} = \frac{k}{\omega} E_0 \cos(\omega t - k \cos \alpha x - k \sin \alpha y + \varphi) (\sin \alpha \vec{u}_x - \cos \alpha \vec{u}_y).$$

Si on se place dans le vide,  $\frac{k}{\omega} = \frac{1}{c}$  où  $c$  est la célérité de l'onde dans le vide.

$$\text{D'où : } \vec{B} = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t - k \cos \alpha x - k \sin \alpha y + \varphi) (\sin \alpha \vec{u}_x - \cos \alpha \vec{u}_y).$$



### Exercice 2

1) Le vecteur  $\vec{k}$  détermine la direction et le sens de propagation de l'onde.

Ce vecteur possède une unique composante positive suivant l'axe  $Ox$  puisque l'onde se propage selon les  $x$  croissants. On obtient :  $\vec{k} = k \vec{u}_x$ .

Le champ électrique d'une onde plane progressive sinusoïdale en un point  $M$  est de la forme :

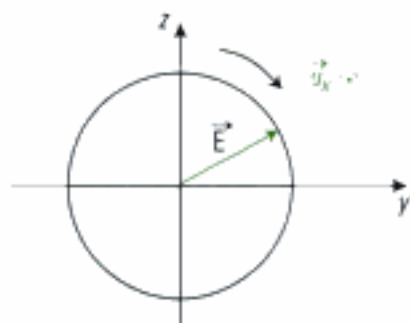
$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM})},$$

où  $O$  est le centre du repère cartésien.

L'onde est polarisée circulairement ce qui implique que les composantes du champ électrique sont déphasées de  $\frac{\pi}{2}$  l'une par rapport à l'autre et que leurs amplitudes sont égales.

L'onde est polarisée circulairement droite. Cela signifie que lorsque l'on se place dans un plan fixe normal au vecteur d'onde ( $x = \text{constante}$ ) de sorte que le vecteur d'onde pointe vers nous, on voit le champ électrique tourner dans le sens horaire.

On trace cela sur la figure suivante :



Le champ électrique s'écrit en un point  $M$  :

$\vec{E} = E'(\cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM} + \varphi)\vec{u}_y - \sin(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM} + \varphi)\vec{u}_z)$ , où  $\varphi$  représente la phase à l'origine du champ électrique.

D'où  $\vec{E} = E'(\cos(\omega t - kx + \varphi)\vec{u}_y - \sin(\omega t - kx + \varphi)\vec{u}_z)$ , où  $x$  est l'abscisse du point  $M$ .

Or, l'amplitude du champ électrique est :  $\sqrt{E'^2(\cos^2(\omega t - kx) + \sin^2(\omega t - kx))} = E' = E_0$ .

On en déduit :  $\vec{E} = E_0(\cos(\omega t - kx + \varphi)\vec{u}_y - \sin(\omega t - kx + \varphi)\vec{u}_z)$ .

2) On met en œuvre la méthode n° 1.

L'onde est une OPPH donc  $\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} = \frac{kE_0}{\omega}(\sin(\omega t - kx + \varphi)\vec{u}_y + \cos(\omega t - kx + \varphi)\vec{u}_z)$ .

Si on se place dans le vide,  $\frac{k}{\omega} = \frac{1}{c}$  où  $c$  est la célérité de l'onde dans le vide.

D'où :  $\vec{B} = \frac{E_0}{c}(\sin(\omega t - kx + \varphi)\vec{u}_y + \cos(\omega t - kx + \varphi)\vec{u}_z)$ .

3) Le vecteur de Poynting est  $\vec{R} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{E_0^2}{\mu_0 c}(\cos^2(\omega t - kx) + \sin^2(\omega t - kx))\vec{u}_x$ ,

ce qui donne :  $\vec{R} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{E_0^2}{\mu_0 c}\vec{u}_x$ .

Ce vecteur est bien dirigé selon  $\vec{u}_x$  ce qui est logique puisqu'il représente la direction de propagation de l'énergie qui s'effectue bien dans le sens de propagation de l'onde.

La puissance rayonnée est la même en tout point. On en conclut que la propagation s'effectue sans pertes.

On en déduit :  $\langle \vec{R} \rangle = \frac{E_0^2}{\mu_0 c}\vec{u}_x$ .

### Exercice 3

1) On met en œuvre la méthode n° 2.

Le champ électrique peut s'écrire en fonction du vecteur d'onde sous la forme :

$\vec{E} = (E_x \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM} + \varphi_x)\vec{u}_x + E_z \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM} + \varphi_z)\vec{u}_z)$  où  $\vec{OM} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z$ .

Ici,  $\vec{E} = E_0(\cos(\omega t + ky)\vec{u}_x + \cos(\omega t + ky + \frac{\pi}{2})\vec{u}_z)$ .

Le vecteur d'onde est donc :  $\vec{k} = -k\vec{u}_y$ .

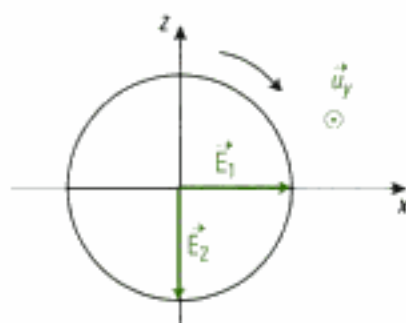
Les composantes du champ électrique ont même amplitude et sont déphasées de  $\frac{\pi}{2}$  l'une par rapport à l'autre ( $\varphi_x - \varphi_z = -\frac{\pi}{2}$ ). On déduit que l'onde est polarisée circulairement.



Afin de déterminer si la polarisation est droite ou gauche, on étudie le champ électrique pour deux valeurs caractéristiques de celui-ci au niveau du plan  $y=0$  : pour  $\omega t = 0$ ,  $\vec{E}_1 = E_0 \vec{u}_x$  et pour  $\omega t = \frac{\pi}{2}$ ,  $\vec{E}_2 = -E_0 \vec{u}_z$ .

On trace ces vecteurs dans un plan fixe normal au vecteur d'onde ( $y = \text{constante}$ ) tel que le vecteur d'onde pointe vers nous et on détermine le sens de rotation du vecteur champ électrique.

Dans ce plan, le vecteur tourne dans le sens  $\vec{E}_1$  vers  $\vec{E}_2$  :



**L'onde est polarisée circulairement droite.**

On met en œuvre la méthode n° 1.

Si on se place dans le vide,  $\frac{k}{\omega} = \frac{1}{c}$  où  $c$  est la célérité de l'onde dans le vide, l'onde est une OPPH

$$\text{donc : } \vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} = \frac{E_0}{c} (\sin(\omega t + ky) \vec{u}_x + \cos(\omega t + ky) \vec{u}_z).$$

$$\text{On a } \vec{R} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = -\frac{E_0^2}{\mu_0 c} (\sin^2(\omega t + ky) + \cos^2(\omega t + ky)) \vec{u}_y.$$

$$\text{D'où } \vec{R} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = -\frac{E_0^2}{\mu_0 c} \vec{u}_y = \frac{E_0^2}{\mu_0 kc} \vec{k}.$$

2) On met en œuvre la méthode n° 2.

Le champ électrique peut s'écrire en fonction du vecteur d'onde sous la forme :

$$\vec{E} = (E_x \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM} + \varphi_x) \vec{u}_x + E_y \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM} + \varphi_y) \vec{u}_y) \text{ où } \vec{OM} = x \vec{u}_x + y \vec{u}_y + z \vec{u}_z.$$

$$\text{Ici, } \vec{E} = E_0 \left( \cos(\omega t + kz) \vec{u}_x + \cos\left(\omega t + kz + \frac{\pi}{3}\right) \vec{u}_y \right).$$

Le vecteur d'onde est donc  $\vec{k} = -k \vec{u}_z$ .

$$\text{Le module du champ électrique est } \|\vec{E}\| = \frac{\sqrt{5}E_0}{2} \text{ pour } \omega t + kz = 0 \text{ et } \|\vec{E}\| = \frac{\sqrt{3}E_0}{2}$$

pour  $\omega t + kz = \frac{\pi}{2}$ . Le module du champ électrique est variable au cours du temps, l'onde est donc polarisée elliptiquement.

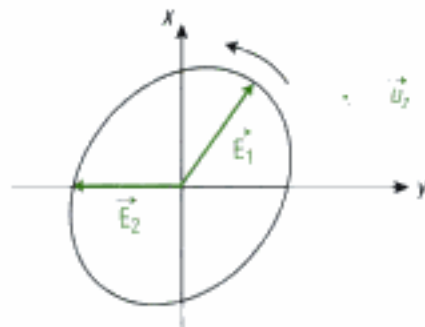
Afin de déterminer si l'onde est polarisée droite ou gauche, on étudie le champ électrique réel

$$\left( E_0 \cos(\omega t + kz) \vec{u}_x + E_0 \cos\left(\omega t + kz + \frac{\pi}{3}\right) \vec{u}_y \right) \text{ pour deux valeurs caractéristiques de celui-ci au niveau}$$

$$\text{du plan } z=0 : \text{ pour } \omega t = 0, \vec{E}_1 = E_0 \vec{u}_x + \frac{1}{2} E_0 \vec{u}_y \text{ et pour } \omega t = \frac{\pi}{2}, \vec{E}_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} E_0 \vec{u}_y.$$

On trace ces vecteurs dans un plan fixe normal au vecteur d'onde ( $z = \text{constante}$ ) tel que le vecteur d'onde pointe vers nous et on détermine le sens de rotation du vecteur champ électrique.

Dans ce plan, le vecteur tourne dans le sens  $\vec{E}_1$  vers  $\vec{E}_2$  :



**L'onde est polarisée elliptiquement gauche.**

On met en œuvre la méthode n° 1.

Si on se place dans le vide,  $\frac{k}{\omega} = \frac{1}{c}$  où  $c$  est la célérité de l'onde dans le vide, l'onde est une OPPH

$$\text{donc : } \vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} = \frac{E_0}{c} \left( \cos(\omega t + ky + \frac{\pi}{3}) \vec{u}_x - \cos(\omega t + kz) \vec{u}_y \right).$$

$$\text{On a } \vec{R} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = - \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \left( \cos^2(\omega t + kz) + \cos^2(\omega t + kz + \frac{\pi}{3}) \right) \vec{u}_z.$$

Or,

$$\cos^2(\omega t + kz) + \cos^2(\omega t + kz + \frac{\pi}{3}) = \cos^2(\omega t + kz) + \left( \frac{1}{2} \cos(\omega t + kz) - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin(\omega t + kz) \right)^2$$

$$= \cos^2(\omega t + kz) + \frac{1}{4} \cos^2(\omega t + kz) + \frac{3}{4} \sin^2(\omega t + kz) - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos(\omega t + kz) \sin(\omega t + kz)$$

$$= \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \cos^2(\omega t + kz) - \frac{\sqrt{3}}{4} \sin(2(\omega t + kz))$$

$$= \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \frac{1 + \cos(2(\omega t + kz))}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} \sin(2(\omega t + kz))$$

$$= 1 + \frac{1}{2} \cos(2(\omega t + kz) + \frac{\pi}{3})$$

$$\text{D'où } \vec{R} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = - \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \left( 1 + \frac{1}{2} \cos(2\omega t + 2kz + \frac{\pi}{3}) \right) \vec{u}_z.$$

3) On met en œuvre la méthode n° 2.

Le champ électrique peut s'écrire en fonction du vecteur d'onde sous la forme :

$$\vec{E} = (E_y \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM} + \varphi_y) \vec{u}_y + E_z \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM} + \varphi_z) \vec{u}_z) \text{ où } \vec{OM} = x \vec{u}_x + y \vec{u}_y + z \vec{u}_z.$$

$$\text{Ici, } \vec{E} = E_0 \left( \cos(\omega t - kx) \vec{u}_y + \cos(\omega t - kx - \frac{\pi}{2}) \vec{u}_z \right).$$

Le vecteur d'onde est donc  $\vec{k} = k \vec{u}_x$ .

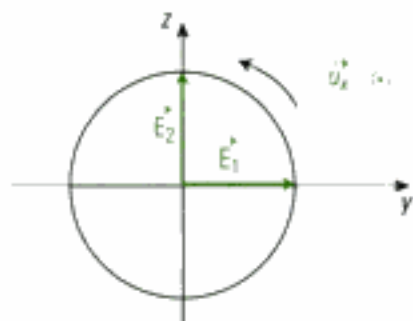
Les composantes du champ électrique ont même amplitude et sont déphasées de  $\frac{\pi}{2}$  l'une par rapport à l'autre ( $\varphi_y - \varphi_z = \frac{\pi}{2}$ ). On en déduit que l'onde est polarisée circulairement.

Afin de déterminer si la polarisation est droite ou gauche, on étudie le champ électrique pour deux valeurs caractéristiques de celui-ci au niveau du plan  $x=0$  : pour  $\omega t = 0$ ,  $\vec{E}_1 = E_0 \vec{u}_y$

et pour  $\omega t = \frac{\pi}{2}$ ,  $\vec{E}_2 = E_0 \vec{u}_z$ .

On trace ces vecteurs dans un plan fixe normal au vecteur d'onde ( $x = \text{constante}$ ) tel que le vecteur d'onde pointe vers nous et on détermine le sens de rotation du vecteur champ électrique.

Dans ce plan, le vecteur tourne dans le sens  $\vec{E}_1$  vers  $\vec{E}_2$  :



**L'onde est polarisée circulairement gauche.**

On met en œuvre la méthode n° 1.

Si on se place dans le vide,  $\frac{k}{\omega} = \frac{1}{c}$  où  $c$  est la célérité de l'onde dans le vide, l'onde est une OPPH

$$\text{donc : } \vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} = \frac{E_0}{c} (-\sin(\omega t - kx) \vec{u}_y + \cos(\omega t - kx) \vec{u}_z).$$

$$\text{On a } \vec{R} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} (\sin^2(\omega t - kx) + \cos^2(\omega t - kx)) \vec{u}_x.$$

$$\text{D'où} \quad \vec{R} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \vec{u}_x.$$

4) On met en œuvre la méthode n° 2.

Le champ électrique peut s'écrire en fonction du vecteur d'onde sous la forme :

$$\vec{E} = (E_x \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM} + \varphi_x) \vec{u}_x + E_y \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM} + \varphi_y) \vec{u}_y) \text{ où } \vec{OM} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z.$$

$$\text{Ici, } \vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kx + \frac{\pi}{3}) (\vec{u}_x + \vec{u}_z).$$

Le vecteur d'onde est donc  $\vec{k} = k\vec{u}_x$ .

Le champ électrique a une direction fixe en fonction du temps.

**L'onde est polarisée rectilignement.**

On met en œuvre la méthode n° 1.

$$\text{Le champ électrique peut s'écrire } \vec{E} = (E_0 \vec{u}_y + E_0 \vec{u}_z) \cos(\omega t - kz + \frac{\pi}{3}).$$

Si on se place dans le vide,  $\frac{k}{\omega} = \frac{1}{c}$  où  $c$  est la célérité de l'onde dans le vide, l'onde est une OPPH

$$\text{donc } \vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} = \frac{E_0}{c} (-\vec{u}_y + \vec{u}_z) \cos(\omega t - kz + \frac{\pi}{3}).$$

$$\text{D'où} \quad \vec{R} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{2E_0^2}{\mu_0 c} \cos^2(\omega t - kz + \frac{\pi}{3}) \vec{u}_x.$$

#### Exercice 4

$$1) \text{ On a } d\vec{A}(M, t) = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} e^{j(\omega(t - \frac{r}{c}))} dz \vec{e}_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} e^{j(\omega t - kr)} dz \vec{e}_z.$$

2) On retrouve un potentiel vecteur de même forme que celui créé par un dipôle oscillant écrit sous la forme  $\vec{p} = -j \frac{I}{\omega} e^{j\omega z} dz \vec{e}_z$ .

3) Dans le cas d'un dipôle oscillant de ce type, on sait, d'après le cours, que le champ électrique est dirigé selon  $\vec{e}_\theta$  et le champ magnétique selon  $\vec{e}_\phi$  dans la zone de rayonnement.



Hidden page

L'onde est polarisée circulairement droite donc :

$$\vec{E}_1 = E_1 \cos(\omega t - kx) \vec{u}_y + E_1 \cos\left(\omega t - kx + \frac{\pi}{2}\right) \vec{u}_z = E_1 \cos(\omega t - kx) \vec{u}_y - E_1 \sin(\omega t - kx) \vec{u}_z.$$

On sait qu'à l'instant  $t = 0$  pour  $x = 0$ , l'amplitude du champ électrique est  $E_0$ , ce qui donne  $E_1 = E_0$ .

En notation complexe,  $\vec{E}_1 = E_0 e^{j(\omega t - kx)} \vec{u}_y + jE_0 e^{j(\omega t - kx)} \vec{u}_z$ .

On met en œuvre la méthode n°1 dans le cas d'une OPPH.

On trouve 
$$\vec{B}_1 = \frac{\vec{k}_1 \wedge \vec{E}_1}{\omega} = -j \frac{E_0}{c} e^{j(\omega t - kx)} \vec{u}_y + \frac{E_0}{c} e^{j(\omega t - kx)} \vec{u}_z.$$

La deuxième OPPH se propage dans le vide selon la direction  $x'x$  vers les  $x < 0$  donc  $\vec{k}_2 = -\frac{\omega}{c} \vec{u}_x$ .  
L'onde est polarisée circulairement donc les amplitudes des composantes du champ électrique selon l'axe  $y'y$  et selon l'axe  $z'z$  sont égales et déphasées de  $\frac{\pi}{2}$ .

L'onde est polarisée circulairement gauche donc :

$$\vec{E}_2 = E_2 \cos(\omega t + kx) \vec{u}_y + E_2 \cos\left(\omega t + kx + \frac{\pi}{2}\right) \vec{u}_z = E_2 \cos(\omega t + kx) \vec{u}_y - E_2 \sin(\omega t + kx) \vec{u}_z.$$

On sait qu'à l'instant  $t = 0$  pour  $x = 0$ , l'amplitude du champ électrique est  $E_0$ , ce qui donne  $E_2 = E_0$ .

En notation complexe,  $\vec{E}_2 = E_0 e^{j(\omega t + kx)} \vec{u}_y + jE_0 e^{j(\omega t + kx)} \vec{u}_z$ .

On met en œuvre la méthode n°1 dans le cas d'une OPPH.

On trouve 
$$\vec{B}_2 = \frac{\vec{k}_2 \wedge \vec{E}_2}{\omega} = j \frac{E_0}{c} e^{j(\omega t + kx)} \vec{u}_y - \frac{E_0}{c} e^{j(\omega t + kx)} \vec{u}_z.$$

2) L'onde résultante est la somme des deux OPPH :

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = E_0 \left( e^{j(\omega t - kx)} + e^{j(\omega t + kx)} \right) \vec{u}_y + jE_0 \left( e^{j(\omega t - kx)} + e^{j(\omega t + kx)} \right) \vec{u}_z$$

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = j \frac{E_0}{c} \left( e^{j(\omega t - kx)} - e^{j(\omega t + kx)} \right) \vec{u}_y + \frac{E_0}{c} \left( e^{j(\omega t - kx)} - e^{j(\omega t + kx)} \right) \vec{u}_z.$$


D'où

$$\begin{cases} \vec{E} = E_0 e^{j\omega t} \left( \left( e^{-jkx} + e^{jkx} \right) \vec{u}_y + j \left( e^{-jkx} + e^{jkx} \right) \vec{u}_z \right) \\ \vec{B} = \frac{E_0}{c} e^{j\omega t} \left( j \left( e^{-jkx} - e^{jkx} \right) \vec{u}_y + \left( e^{-jkx} - e^{jkx} \right) \vec{u}_z \right). \end{cases}$$

Or,  $e^{-jkx} + e^{jkx} = 2 \cos(kx)$  et  $e^{-jkx} - e^{jkx} = -2j \sin(kx)$ .

On en déduit  $\vec{E} = 2E_0 \cos(kx) e^{j\omega t} (\vec{u}_y + j \vec{u}_z)$  et  $\vec{B} = 2 \frac{E_0}{c} \sin(kx) e^{j\omega t} (\vec{u}_y - j \vec{u}_z)$ .

3) Le vecteur de Poynting est calculé à partir des expressions réelles des champs.

 On rappelle que  $\text{Re}(e^{j\omega t}) = \cos(\omega t)$  et  $\text{Re}(j e^{j\omega t}) = -\sin(\omega t)$ .

Les expressions réelles des champs sont alors :

$$\vec{E} = 2E_0 \cos(kx) (\cos(\omega t) \vec{u}_y - \sin(\omega t) \vec{u}_z) \text{ et}$$

$$\vec{B} = 2 \frac{E_0}{c} \sin(kx) (\cos(\omega t) \vec{u}_y + \sin(\omega t) \vec{u}_z).$$

Donc

$$\vec{R} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = 2 \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \sin(2kx) \sin(2\omega t) \vec{u}_x.$$

On trouve alors :  $\langle \vec{R} \rangle = \vec{0}$ .

4) L'onde résultante est une onde stationnaire puisque les variables d'espace et de temps ne sont pas liées.

**L'onde ne se propage pas**, d'ailleurs  $\langle \vec{R} \rangle = \vec{0}$ .

On emploie normalement le terme de polarisation uniquement pour les OPPH. Par extension ici, comme les composantes du champ électrique sont à tout instant de module égal et qu'elles sont

déphasées de  $\frac{\pi}{2}$ , on peut dire que l'onde résultante est polarisée circulairement. Cependant, comme cette dernière est définie comme la superposition d'une onde polarisée circulairement gauche et d'une onde polarisée circulairement droite, on ne peut pas définir de polarisation droite ou gauche pour cette onde.



On remarque ici que, contrairement aux OPPH, il est impossible de définir une orientation de polarisation.

## Exercice 7

1) L'OPPH se propage dans le vide selon la direction  $x'x$  vers les  $x$  croissants, donc  $\vec{k} = \frac{\omega}{c} \vec{u}_x$ .

L'onde est polarisée rectilignement selon l'axe  $y'y$  donc le champ électrique est dirigé suivant  $\vec{u}_y$ .

On en déduit  $\vec{E} = E_m \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM} + \varphi) \vec{u}_y = E_m \cos(\omega t - kx + \varphi) \vec{u}_y$  en un point  $M(x, y, z)$ .

Or, l'amplitude est maximale et égale à  $E_0$  à l'instant  $t = 0$  et au point d'abscisse  $x = 0$ , d'où  $E_m = E_0$  et  $\varphi = 0$ .

On en conclut  $\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{u}_y$ .

On met en œuvre la méthode n°1 dans le cas d'une OPPH.

On trouve  $\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t - kx) \vec{u}_z$ .

2) On réalise le schéma du dispositif et on note  $A$  l'autre extrémité de l'antenne.

La tension aux bornes de l'antenne est obtenue en déterminant la circulation du champ électrique le long de l'antenne :

$U = \int_{\text{Antenne}} \vec{E} \cdot d\vec{l}$  où  $d\vec{l} = dx \vec{u}_x + dy \vec{u}_y$  représente un déplacement élémentaire le long de l'antenne d'après le sens choisi arbitrairement sur la figure.

On trouve  $U = \int_0^{a \cos \theta} E_0 \cos(\omega t - kx) dy$ .

Or les coordonnées d'un point de l'antenne sont liées :  $y = x \tan \theta$ .

D'où :  $U = \int_0^{a \cos \theta} E_0 \cos(\omega t - kx) \tan \theta dx = \left[ -\frac{E_0}{k} \sin(\omega t - kx) \tan \theta \right]_0^{a \cos \theta}$ .

On en déduit la différence de potentiel aux bornes de l'antenne :

$$U = V_A - V_0 = -\frac{E_0}{k} \tan \theta (\sin(\omega t - k a \cos \theta) - \sin(\omega t)).$$



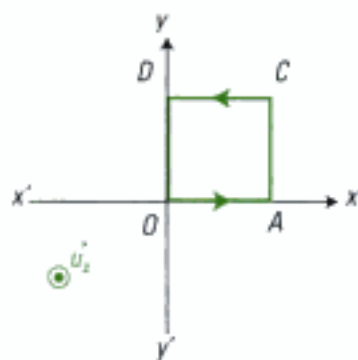
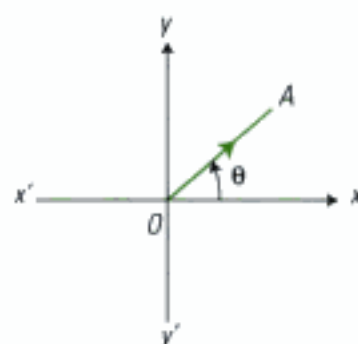
On rappelle la formule de trigonométrie :  $\sin p - \sin q = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$ .

D'où  $U = V_A - V_0 = \frac{2 E_0}{k} \tan \theta \sin\left(\frac{k a \cos \theta}{2}\right) \cos\left(\omega t - \frac{k a \cos \theta}{2}\right)$ .

3) L'amplitude de la tension peut être obtenue par la circulation du champ électrique le long du cadre ou par la loi de Faraday

$U = -\frac{d\Phi}{dt}$  où  $\Phi$  représente le flux du vecteur champ magnétique à travers la surface du cadre.

On note  $OACD$  les quatre coins du cadre représenté sur la figure ci-dessous que l'on oriente de manière arbitraire dans le sens  $OACD$  :





Hidden page

Hidden page

4) On met en œuvre la méthode n° 4.

Si  $\alpha \gg |\beta| \omega$ , la relation de dispersion devient  $k \approx -j\alpha\omega = \alpha\omega e^{-j\frac{\pi}{2}}$ .

On trouve donc :  $k \approx \pm \sqrt{\alpha\omega} e^{-j\frac{\pi}{4}} = \pm \sqrt{\frac{\alpha\omega}{2}} (1-j)$ .

D'où :  $\vec{E}_1 = \vec{E}_0 e^{-\sqrt{\frac{\alpha\omega}{2}}x} e^{j(\omega t - \sqrt{\frac{\alpha\omega}{2}}x + \varphi)}$  ou  $\vec{E}_2 = \vec{E}_0 e^{\sqrt{\frac{\alpha\omega}{2}}x} e^{j(\omega t + \sqrt{\frac{\alpha\omega}{2}}x + \varphi)}$ .

$\vec{E}_1$  représente une onde qui se propage dans le sens des  $x$  croissants en s'atténuant lors de la propagation et  $\vec{E}_2$  représente une onde qui se propage dans le sens des  $x$  décroissants en s'atténuant lors de la propagation.

**L'onde peut ainsi se propager en s'atténuant le long de l'axe Ox.**

On s'aperçoit qu'il s'agit d'un milieu dispersif puisque le nombre d'onde  $n$  n'est pas une fonction linéaire de la pulsation.

 On remarque que la non-linéarité de  $k(\omega)$  provient du terme  $-\alpha \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  dans l'équation de propagation. C'est donc ce terme qui modélise le phénomène dissipatif du milieu.

## Exercice 10

1) • La force magnétique qui s'exerce sur les charges mobiles de charge  $-e$  est  $\vec{F}_m = -e\vec{v} \wedge \vec{B}$  où  $\vec{v}$  est la vitesse des porteurs de charge.

La force électrique est  $\vec{F}_e = -e\vec{E}$ .

$$\text{Donc } \frac{\|\vec{F}_m\|}{\|\vec{F}_e\|} = \frac{e \|\vec{v} \wedge \vec{B}\|}{e \|\vec{E}\|} \leq \frac{\|\vec{v}\| \|\vec{B}\|}{\|\vec{E}\|}.$$

Or, pour une OPPH dans le vide, on a  $\frac{\|\vec{B}\|}{\|\vec{E}\|} = \frac{1}{c}$  où  $c$  est la vitesse de la lumière.

D'où  $\frac{\|\vec{F}_m\|}{\|\vec{F}_e\|} \leq \frac{\|\vec{v}\|}{c} \ll 1$  car les électrons sont non relativistes.

**On peut négliger la force magnétique devant la force électrique.**

• On applique la deuxième loi de Newton à un électron soumis à la seule force électrique.

On obtient  $m \frac{d\vec{v}_e}{dt} = -e\vec{E}$  où  $\vec{E}$  est le champ électrique associé à l'OPPH de pulsation  $\omega$ .

On peut donc travailler en notation complexe afin d'obtenir  $j m \omega \vec{v}_e = -e\vec{E}$ , ce qui donne :

$$\vec{v}_e = j \frac{e}{m\omega} \vec{E}.$$

2) Le courant est associé au mouvement des charges mobiles. Les seules charges mobiles dans cet exercice sont les électrons. Donc, la densité de courant est le produit de la charge par unité de volume ( $-Ne$ ) par la vitesse des électrons ( $\vec{v}_e$ ).

On obtient alors en notation complexe :  $\vec{j} = -j \frac{Ne^2}{m\omega} \vec{E}$ .

3) • Les équations de Maxwell donnent, en notation complexe, :

**Équation de Maxwell-Gauss :  $\text{div} \vec{E} = 0$  car le plasma est localement neutre.**

**Équation de Maxwell-Faraday :  $\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$**

**Équation de Maxwell-Flux :  $\text{div} \vec{B} = 0$**

**Équation de Maxwell-Ampère :  $\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = j \left( \epsilon_0 \mu_0 \omega - \frac{\mu_0 Ne^2}{m\omega} \right) \vec{E}$**



• L'équation de propagation est obtenue à partir de l'égalité vectorielle :

$$\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}}\vec{E}) = \vec{\text{grad}}(\text{div}\vec{E}) - \Delta\vec{E} = -\Delta\vec{E}.$$

Or,  $\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}}\vec{E}) = \vec{\text{rot}}\left(-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial(\vec{\text{rot}}\vec{B})}{\partial t}$  car on peut intervertir les dérivées spatiales et temporelles.

De plus, d'après l'équation de Maxwell-Ampère :

$$\frac{\partial(\vec{\text{rot}}\vec{B})}{\partial t} = \frac{\partial\left(j\left(\epsilon_0\mu_0\omega - \frac{\mu_0 Ne^2}{m\omega}\right)\vec{E}\right)}{\partial t} = j\left(\epsilon_0\mu_0\omega - \frac{\mu_0 Ne^2}{m\omega}\right)\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = -\left(\epsilon_0\mu_0\omega - \frac{\mu_0 Ne^2}{m\omega}\right)\omega\vec{E}.$$

En utilisant  $\frac{1}{c^2} = \epsilon_0\mu_0$ , on trouve alors :

$$\Delta\vec{E} + \frac{\omega^2}{c^2}\vec{E} - \frac{\mu_0 Ne^2}{m}\vec{E} = \vec{0}.$$

4) Le champ électrique d'une OPPH est de la forme  $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM})}$ .

Or l'onde est polarisée rectilignement suivant  $\vec{e}_x$  et se propage suivant la direction et le sens de l'axe  $Oz$  donc  $\vec{k} = k\vec{e}_z$  et  $\vec{E} = E_0 e^{j(\omega t - kz)}\vec{e}_x$ .

 Le nombre d'onde peut être complexe, c'est pourquoi on le note  $\underline{k}$ . Cependant, dans certains exercices, pour simplifier l'écriture, on notera le nombre d'onde  $k$  même s'il peut être complexe.

En remplaçant le champ électrique par cette expression dans l'équation de propagation, on trouve

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\mu_0 Ne^2}{m}, \text{ ce qui donne :}$$

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{\mu_0 Ne^2 c^2}{m \omega^2}\right) = \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right) \text{ où } \omega_p = \sqrt{\frac{Ne^2}{m\epsilon_0}} \text{ car } \mu_0 c^2 = \frac{1}{\epsilon_0}.$$

5) Application numérique :  $f_p = 8,98 \text{ MHz}$ .

Lorsque  $f < f_p$ ,  $k^2$  est négatif et le nombre d'onde est imaginaire pur. Dans ce cas, il n'y a pas propagation de l'onde.

**Les ondes émises par la radio G.O. ne peuvent donc pas se propager dans l'ionosphère.**

 G.O. signifie Grandes Ondes car la longueur d'onde est  $\lambda = 1,4 \text{ km}$ .

6) Pour  $f > f_p$ ,  $k^2$  est positif et le nombre d'onde est réel. Dans ce cas, l'onde se propage sans atténuation.

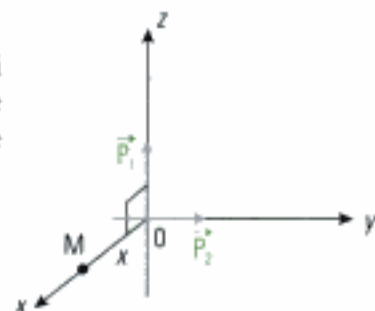
**Les ondes émises par Astra peuvent donc se propager dans l'ionosphère** (ce qui est, heureusement, tout à fait logique).

## Exercice 11

1) L'antenne réceptrice se trouve dans la zone de rayonnement si tout point de cette antenne se trouve à une distance  $r$  de l'antenne émettrice telle que  $r \gg a$  et  $r \gg \lambda$  où  $\lambda$  est la longueur d'onde de l'onde émise.

2)a)

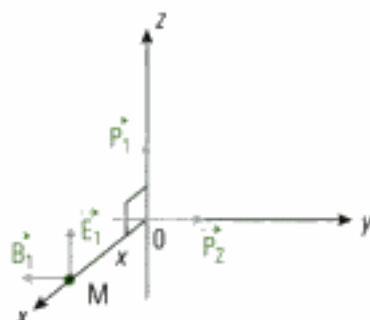
$$\text{On a : } r = x; \theta = \frac{\pi}{2}; \varphi = 0.$$



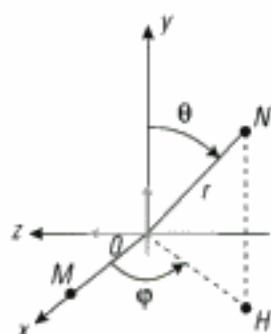
2)b) Au point  $M$ , on a  $\vec{u}_r = \vec{u}_x$  ;  $\vec{u}_\theta = -\vec{u}_z$  et  $\vec{u}_\varphi = \vec{u}_y$ .

D'après les expressions données dans l'énoncé, on a :

$$\vec{E}_1(M) = \frac{\mu_0 \omega^2}{4\pi x} p_0 \cos\left(\omega t - \frac{\omega x}{c}\right) \vec{u}_z \text{ et } \vec{B}_1(M) = -\frac{\mu_0 \omega^2}{4\pi x c} p_0 \cos\left(\omega t - \frac{\omega x}{c}\right) \vec{u}_y.$$



3) On reprend l'étude graphique en plaçant l'axe  $Oy$  comme axe vertical et en repérant un point  $N$  de l'espace par rapport à cet axe :



Donc le point  $M$  est repéré par  $r = x$  ;  $\theta = \frac{\pi}{2}$  ;  $\varphi = 0$  et au point  $M$ , on a  $\vec{u}_r = \vec{u}_x$  ;  $\vec{u}_\theta = -\vec{u}_z$  et  $\vec{u}_\varphi = \vec{u}_y$ .

De plus, le dipôle oscillant est en sinus au lieu d'être en cosinus.

On en déduit  $\vec{E}_2(M) = \frac{\mu_0 \omega^2}{4\pi x} p_0 \sin\left(\omega t - \frac{\omega x}{c}\right) \vec{u}_y$  et  $\vec{B}_2(M) = \frac{\mu_0 \omega^2}{4\pi x c} p_0 \sin\left(\omega t - \frac{\omega x}{c}\right) \vec{u}_z$ .

4) Le champ électromagnétique est la superposition des champs précédents.

D'où :

$$\begin{cases} \vec{E} = \frac{\mu_0 \omega^2}{4\pi x} p_0 \left( \sin\left(\omega t - \frac{\omega x}{c}\right) \vec{u}_y + \cos\left(\omega t - \frac{\omega x}{c}\right) \vec{u}_z \right) \\ \vec{B} = \frac{\mu_0 \omega^2}{4\pi x c} p_0 \left( -\cos\left(\omega t - \frac{\omega x}{c}\right) \vec{u}_y + \sin\left(\omega t - \frac{\omega x}{c}\right) \vec{u}_z \right) \end{cases}$$

La propagation s'effectue dans la direction et le sens de l'axe  $Ox$ .

Les composantes du champ électrique sont déphasées de  $\frac{\pi}{2}$  l'une par rapport à l'autre et leurs amplitudes sont identiques. Le champ est donc polarisé circulairement.

Afin de déterminer si l'onde est polarisée droite ou gauche, on étudie l'évolution du champ électrique, sur le plan  $x = 0$  : pour  $\omega t = 0$ ,  $\vec{E}_3 = \frac{\mu_0 \omega^2}{4\pi x} p_0 \vec{u}_z$  et pour  $\omega t = \frac{\pi}{2}$ ,  $\vec{E}_4 = \frac{\mu_0 \omega^2}{4\pi x} p_0 \vec{u}_y$ .

Hidden page

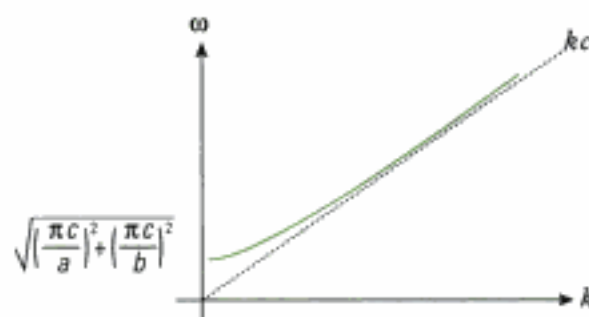


On sélectionne une des deux équations où on effectue les calculs :

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0 = \left( -\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 - k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \right) E_{0x} \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{b}\right) e^{j(\omega t - kz)}$$

On a donc la relation de dispersion suivante :

$$\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 + k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} = 0.$$



La courbe est une branche d'hyperbole.

La pulsation de cette onde ne peut être inférieure à  $\omega_c = \sqrt{\left(\frac{\pi c}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi c}{b}\right)^2}$ .

4) On met en œuvre la méthode n° 1.

Il ne s'agit pas d'une OPPH, il faut donc revenir à l'équation de Maxwell-Faraday pour déterminer le champ magnétique.

On obtient :  $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\vec{\text{rot}} \vec{E} = \frac{\partial E_y}{\partial z} \vec{u}_x + \frac{\partial E_x}{\partial z} \vec{u}_y - \left( \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \vec{u}_z$ .

$$\Leftrightarrow j\omega \vec{B} = -jkE_{0y} \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) e^{j(\omega t - kz)} \vec{u}_x - jkE_{0x} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{b}\right) e^{j(\omega t - kz)} \vec{u}_y + \left( \frac{\pi}{a} E_{0y} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) e^{j(\omega t - kz)} - \frac{\pi}{b} E_{0x} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) e^{j(\omega t - kz)} \right) \vec{u}_z.$$

Or,  $\frac{\pi}{a} E_{0x} + \frac{\pi}{b} E_{0y} = 0$  soit  $E_{0x} = -\frac{a}{b} E_{0y}$ . Donc :  $\frac{\pi}{a} E_{0y} - \frac{\pi}{b} E_{0x} = \frac{\pi}{a} E_{0y} \left( 1 + \frac{a^2}{b^2} \right)$ .

D'où

$$\vec{B} = -\frac{k}{\omega} E_{0y} \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) e^{j(\omega t - kz)} \vec{u}_x - \frac{k}{\omega} E_{0x} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{b}\right) e^{j(\omega t - kz)} \vec{u}_y + \frac{\pi}{j\omega a} \left( 1 + \frac{a^2}{b^2} \right) E_{0y} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) e^{j(\omega t - kz)} \vec{u}_z.$$

### Exercice 13

1. On part de l'égalité vectorielle suivante :  $\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}} \vec{E}) = \vec{\text{grad}}(\text{div} \vec{E}) - \Delta \vec{E}$ .

Or, d'après l'équation de Maxwell-Faraday,  $\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}} \vec{E}) = \vec{\text{rot}} \left( -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right)$ . Cependant, on peut inter-

vertir les dérivées spatiales et temporelles, donc  $\vec{\text{rot}} \left( -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial(\vec{\text{rot}} \vec{B})}{\partial t}$ .

De plus, l'équation de Maxwell-Gauss donne  $\text{div} \vec{E} = 0$  et l'équation de Maxwell-Ampère donne  $\vec{\text{rot}} \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ .

On en déduit  $-\Delta \vec{E} = \vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}} \vec{E}) = -\frac{\partial(\vec{\text{rot}} \vec{B})}{\partial t} = -\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$ .

Avec  $\frac{1}{c^2} = \epsilon_0 \mu_0$ , on trouve alors :  $\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$ .



Il s'agit de l'équation de d'Alembert. Avec la notation de l'opérateur d'Alembertien :  $\square = \Delta - \frac{\partial^2}{\partial (ct)^2}$ , on a tout de suite :  $\square \vec{E} = \vec{0}$ .

2) On sait qu'en coordonnées sphériques, on a :

$$\Delta \vec{E} = -\text{rot}(\text{rot} \vec{E}) = -\text{rot} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rE(r,t)) \vec{u}_\theta \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rE(r,t)) \vec{u}_\theta.$$

On remplace ceci dans l'équation de propagation :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rE(r,t)) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E(r,t)}{\partial t^2} = 0.$$

Si on étudie la fonction  $F(r,t) = rE(r,t)$ , on trouve qu'elle est solution de l'équation du type :

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} (F(r,t)) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 F(r,t)}{\partial t^2} = 0.$$

Ceci est une équation de d'Alembert typique dont on connaît les solutions sous la forme d'ondes

progressives :  $F(r,t) = f\left(t - \frac{r}{c}\right) + g\left(t + \frac{r}{c}\right)$ .

On en conclut que le champ électrique est de la forme  $E(r,t) = \frac{1}{r} \left( f\left(t - \frac{r}{c}\right) + g\left(t + \frac{r}{c}\right) \right)$ .

L'onde est harmonique puisque composée d'une seule fréquence  $f$ . On en déduit l'expression du champ électrique :

$$\vec{E}(r,t) = \frac{1}{r} \left( E_1 e^{j(\omega t - kr + \varphi_1)} + E_2 e^{j(\omega t + kr + \varphi_2)} \right) \vec{u}_\theta \text{ où } k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi f}{c}.$$

3) L'onde divergente se propage suivant les  $r$  croissants, il vient donc  $E_2 = 0$ .

En  $r = r_0$  à l'instant  $t = \frac{r_0}{c}$ ,  $\vec{E}(r,t) = \frac{E_1}{r_0} e^{j\varphi_1} \vec{u}_\theta = E_m \vec{u}_\theta$ .

On en déduit  $E_1 = r_0 E_m$  et  $\varphi_1 = 0$ . D'où :  $\vec{E}(r,t) = \frac{r_0}{r} E_m e^{j(\omega t - kr)} \vec{u}_\theta$ .

4) On met en œuvre la méthode n°1.

L'onde n'est pas une OPPH car elle n'est pas plane, il faut donc utiliser l'équation de Maxwell-Faraday en coordonnées sphériques :

$$j\omega \vec{B} = -\text{rot} \vec{E} = - \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r_0 E_m e^{j(\omega t - kr)} \right) \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -jk \frac{r_0}{r} E_m e^{j(\omega t - kr)} \end{vmatrix}$$

Si on se place dans le vide,  $\frac{k}{\omega} = \frac{1}{c}$  où  $c$  est la célérité de l'onde dans le vide.

D'où  $\vec{B} = \frac{1}{c} \frac{r_0}{r} E_m e^{j(\omega t - kr)} \vec{u}_\phi$ .



On remarque que l'on a :  $\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} = \frac{k}{\omega} \frac{r_0}{r} E_m e^{j(\omega t - kr)} \vec{u}_\phi$ , expression analogue aux OPPH. Cela peut s'expliquer par le fait que, localement, l'onde se comporte comme une OPPH.

5) Le vecteur de Poynting est calculé à partir des expressions réelles des champs :

$$\vec{E}(r,t) = \frac{r_0}{r} E_m \cos(\omega t - kr) \vec{u}_\theta \text{ et } \vec{B} = \frac{1}{c} \frac{r_0}{r} E_m \cos(\omega t - kr) \vec{u}_\phi$$

⚠ On peut calculer dans certains cas le vecteur de Poynting directement à partir des expressions complexes des champs, par la formule suivante :  $\vec{R} = \text{Re} \left( \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}^*}{2\mu_0} \right)$ , où  $\vec{B}^*$  est le conjugué de  $\vec{B}$ .

$$\text{Donc : } \vec{R} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{1}{\mu_0 c} \left( \frac{r_0}{r} E_m \right)^2 \cos^2(\omega t - kr) \vec{u}_r$$

⚠ On rappelle que  $\langle \cos^2 \rangle = \frac{1}{2}$ .

$$\text{On trouve alors : } \langle \vec{R} \rangle = \frac{1}{2\mu_0 c} \left( \frac{r_0}{r} E_m \right)^2 \vec{u}_r$$

6) Le vecteur de Poynting moyen est invariant sur la surface d'une sphère.

$$\text{Donc } \langle P \rangle = \iint_S \langle \vec{R} \rangle \cdot d\vec{S} \text{ où } d\vec{S} = dS \vec{u}_r$$

$$\langle P \rangle = \langle R \rangle S = \frac{1}{2\mu_0 c} \left( \frac{r_0}{R} E_m \right)^2 4\pi R^2$$

$$\text{On obtient donc : } \langle P \rangle = \langle R \rangle S = \frac{2\pi}{\mu_0 c} (r_0 E_m)^2$$

Cette puissance est indépendante du rayon de la sphère, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de pertes d'énergie lors de la propagation. En un point de la sphère de rayon  $R$ , la puissance surfacique varie en  $\frac{1}{R^2}$  puisque la surface de la sphère varie en  $R^2$ .

## Exercice 14

1) Le champ électrique peut s'écrire en fonction du vecteur d'onde sous la forme :

$$\vec{E} = \vec{E}_0(M) e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM})} \text{ où } \vec{OM} = x \vec{u}_x + y \vec{u}_y + z \vec{u}_z \text{ et } \vec{k} \text{ définit le sens et la direction de propagation. Ici, } \vec{E} = E_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{j(\omega t - kz)} \vec{u}_y$$

Le vecteur  $\vec{k}$  est donc  $\vec{k} = k \vec{u}_z$ . L'onde se propage dans la direction de l'axe  $z$  dans le sens de  $z$  croissants.

2)a) On met en œuvre la méthode n° 3.

On remplace le champ électrique par son expression dans l'équation de propagation qui est toujours l'équation de d'Alembert :  $\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$ .

$$\text{Ceci donne : } \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0$$

$$\text{D'où } \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0 = \left( -\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 - k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \right) E_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{j(\omega t - kz)}$$

$$\text{La relation de dispersion est donc : } k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2$$

$$2)b) \text{ On obtient } k = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2} \text{ que l'on trace.}$$



Hidden page

6) On part de l'expression de  $k$  en fonction de  $\omega$  :  $k = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2} = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \left(\frac{\pi c}{a\omega}\right)^2}$ .

La vitesse de phase est  $v_\phi = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega}{\frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \left(\frac{\pi c}{a\omega}\right)^2}} = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\pi c}{a\omega}\right)^2}}$ .

On trouve  $\frac{v_\phi}{c} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\pi c}{a\omega}\right)^2}} > 1$  car  $\sqrt{1 - \left(\frac{\pi c}{a\omega}\right)^2} < 1$ .

La vitesse de phase est supérieure à la vitesse de la lumière. Ceci est possible car la vitesse de phase n'a pas de réalité physique.

En effet, elle correspond à la vitesse de propagation d'une OPPH qui elle-même n'a pas de réalité physique puisqu'elle est infinie dans le temps et sa source est infinie suivant deux directions.

7) Par définition, la vitesse de groupe est  $v_g = \frac{d\omega}{dk}$ . Différencions la relation de dispersion, on obtient :  $2kdk = \frac{2\omega d\omega}{c^2} \Leftrightarrow v_g = \frac{c^2}{v_\phi}$ .

D'où  $v_g = c \sqrt{1 - \left(\frac{\pi c}{a\omega}\right)^2}$

et  $\frac{v_g}{c} = \sqrt{1 - \left(\frac{\pi c}{a\omega}\right)^2} < 1$ .

La vitesse de groupe correspond à la vitesse de propagation de l'onde. Il est logique qu'elle soit inférieure à la vitesse de la lumière.

## Exercice 15

1)a) L'onde se propage dans la direction et le sens de l'axe  $xx'$ . On a alors  $\vec{k} = -k \vec{u}_x$ .

Le champ électrique d'une onde plane progressive sinusoïdale en un point  $M$  est de la forme :

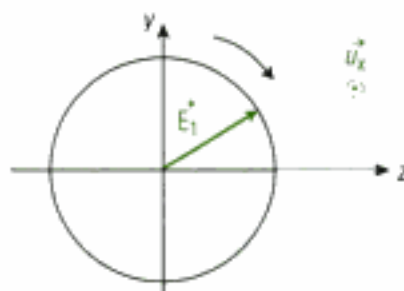
$$\vec{E}_1 = \vec{E}_{01} e^{j(\omega t - k \cdot \vec{OM})} = \vec{E}_{01} e^{j(\omega t + kx)},$$

où  $O$  est le centre du repère cartésien.

L'onde est polarisée circulairement ce qui implique que les amplitudes de chaque composante du champ électrique sont égales et déphasées de  $\frac{\pi}{2}$ .

L'onde est polarisée circulairement droite. Cela signifie que lorsque l'on se place dans un plan fixe normal au vecteur d'onde ( $x = \text{constante}$ ) de sorte que le vecteur d'onde pointe vers nous, on voit le champ électrique tourner dans le sens horaire.

On trace cela sur la figure suivante :



On en déduit l'expression du champ :

$$\vec{E}_1 = -E_{01} \sin(\omega t + kx + \varphi) \vec{u}_y + E_{01} \cos(\omega t + kx + \varphi) \vec{u}_z.$$

Or, le champ électrique à l'instant  $t = 0$  et en  $x = 0$  est égal à  $E_0 \vec{u}_y$ .

On en conclut  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  et  $E_{01} = E_0$ .

On trouve alors  $\vec{E}_1 = E_0 \cos(\omega t + kx) \vec{u}_y + E_0 \sin(\omega t + kx) \vec{u}_z$ ,

et  $\vec{E}_1 = E_0 e^{j(\omega t + kx)} (\vec{u}_y - j \vec{u}_z)$ .

1)b) On met en œuvre la méthode n° 1.

L'onde est une OPPH donc  $\vec{B}_1 = \frac{\vec{k}_1 \wedge \vec{E}_1}{\omega} = \frac{k}{\omega} E_0 e^{j(\omega t + kx)} (-j \vec{u}_y - \vec{u}_z)$ .

Si on se place dans le vide,  $\frac{k}{\omega} = \frac{1}{c}$  où  $c$  est la célérité de l'onde dans le vide, et on a :

$$\vec{B}_1 = \frac{E_0}{c} e^{j(\omega t + kx)} (-j \vec{u}_y - \vec{u}_z).$$

Ceci donne en notation réelle :

$$\vec{B}_1 = \frac{E_0}{c} (\sin(\omega t + kx) \vec{u}_y - \cos(\omega t + kx) \vec{u}_z).$$

1)c) Le champ électrique, en notation réelle, est :

$$\vec{E}_2 = E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{u}_y + E_0 \sin(\omega t - kx) \vec{u}_z.$$

On met en œuvre la méthode n° 2.

Le champ électrique peut s'écrire en fonction du vecteur d'onde sous la forme :

$$\vec{E}_2 = (E_{02y} \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM} + \varphi_y) \vec{u}_y + E_{02z} \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM} + \varphi_z) \vec{u}_z)$$

où  $\vec{OM} = x \vec{u}_x + y \vec{u}_y + z \vec{u}_z$ .

Ici,  $\vec{E}_2 = E_0 (\cos(\omega t - kx) \vec{u}_y + \cos(\omega t - kx - \frac{\pi}{2}) \vec{u}_z)$ .

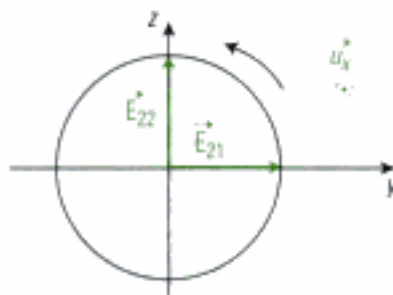
Le vecteur d'onde est donc  $\vec{k} = k \vec{u}_x$ .

Chaque composante du champ électrique a même amplitude et  $\varphi_y - \varphi_z = \frac{\pi}{2}$ . On en déduit que l'onde est polarisée circulairement.

Pour déterminer si la polarisation est droite ou gauche, on étudie le champ électrique pour deux valeurs caractéristiques de celui-ci sur le plan  $x = 0$  : pour  $\omega t = 0$ ,  $\vec{E}_{21} = E_0 \vec{u}_y$  et pour  $\omega t = \frac{\pi}{2}$ ,  $\vec{E}_{22} = E_0 \vec{u}_z$ .

On trace ces vecteurs dans un plan fixe normal au vecteur d'onde ( $x = \text{constante}$ ) tel que le vecteur d'onde pointe vers nous et on détermine le sens de rotation du vecteur champ électrique.

Dans ce plan, le vecteur tourne dans le sens  $\vec{E}_{21}$  vers  $\vec{E}_{22}$  :



**L'onde est polarisée circulairement gauche et se propage dans la direction et le sens de l'axe  $x'x$ .**



1)d) On met en œuvre la méthode n° 1.

L'onde est une OPPH donc  $\vec{B}_2 = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}_2}{\omega} = \frac{k}{\omega} E_0 e^{j(\omega t - kx)} (j\vec{u}_y + \vec{u}_z)$ .

Si on se place dans le vide,  $\frac{k}{\omega} = \frac{1}{c}$  où  $c$  est la célérité de l'onde dans le vide, et on a :

$$\vec{B}_2 = \frac{E_0}{c} e^{j(\omega t - kx)} (j\vec{u}_y + \vec{u}_z).$$

Ceci donne en notation réelle :

$$\vec{B}_2 = \frac{E_0}{c} (-\sin(\omega t - kx)\vec{u}_y + \cos(\omega t - kx)\vec{u}_z).$$

1)e) L'onde se propage dans la direction de l'axe  $x'$  dans le sens des  $x$  croissants.

On a alors  $\vec{k} = k\vec{u}_x$ .

Le champ électrique d'une onde plane progressive sinusoïdale en un point  $M$  est de la forme :

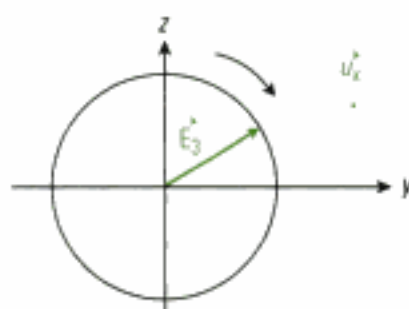
$$\vec{E}_3 = \vec{E}_{03} e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM})} = \vec{E}_{03} e^{j(\omega t - kx)},$$

où  $O$  est le centre du repère cartésien.

L'onde est polarisée circulairement ce qui implique que les composantes du champ électrique sont déphasées de  $\frac{\pi}{2}$  l'une par rapport à l'autre et possèdent des amplitudes égales.

L'onde est polarisée circulairement droite. Cela signifie que lorsque l'on se place dans un plan fixe normal au vecteur d'onde ( $x = \text{constante}$ ) de sorte que le vecteur d'onde pointe vers nous, on voit le champ électrique tourner dans le sens horaire.

On trace cela sur la figure suivante :



On en déduit l'expression du champ :

$$\vec{E}_3 = E_{03} \cos(\omega t - kx + \varphi) \vec{u}_y - E_{03} \sin(\omega t - kx + \varphi) \vec{u}_z.$$

Or, le champ électrique à l'instant  $t = 0$  et en  $x = 0$  est égal à  $E_0 \vec{u}_y$ .

On en conclut  $\varphi = 0$  et  $E_{03} = E_0$ .

$$\text{On trouve alors } \vec{E}_3 = E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{u}_y - E_0 \sin(\omega t - kx) \vec{u}_z.$$

$$\text{Donc } \vec{E}_3 = E_0 e^{j(\omega t - kx)} (\vec{u}_y + j\vec{u}_z).$$

1)f) On met en œuvre la méthode n° 1.

$$\text{L'onde est une OPPH donc } \vec{B}_3 = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}_3}{\omega} = \frac{k}{\omega} E_0 e^{j(\omega t - kx)} (-j\vec{u}_y + \vec{u}_z).$$

Si on se place dans le vide,  $\frac{k}{\omega} = \frac{1}{c}$  où  $c$  est la célérité de l'onde dans le vide, et on a :

$$\vec{B}_3 = \frac{E_0}{c} e^{j(\omega t - kx)} (-j\vec{u}_y + \vec{u}_z).$$

Hidden page

## Exercice 16

1)a) Les équations de Maxwell dans le vide sont :

$$\text{Équation de Maxwell-Gauss : } \operatorname{div} \vec{E} = 0$$

$$\text{Équation de Maxwell-Faraday : } \operatorname{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{Équation de Maxwell-Flux : } \operatorname{div} \vec{B} = 0$$

$$\text{Équation de Maxwell-Ampère : } \operatorname{rot} \vec{B} = - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

L'équation de propagation est obtenue à partir de l'égalité vectorielle :

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{E}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{E}) - \Delta \vec{E} = \Delta \vec{E}.$$

Or,  $\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{E}) = \operatorname{rot} \left( - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = - \frac{\partial(\operatorname{rot} \vec{B})}{\partial t}$  car on peut intervertir les dérivées spatiales et temporelles.

De plus,  $\frac{\partial(\operatorname{rot} \vec{B})}{\partial t} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$  d'après l'équation de Maxwell-Ampère et  $\frac{1}{c^2} = \epsilon_0 \mu_0$ .

On trouve alors 
$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}.$$

 Il s'agit de l'équation de d'Alembert.

1)b) On projette cette équation sur la direction  $z'z$  :  $\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = 0.$

Ceci donne : 
$$-k_1^2 - k_2^2 + \frac{\omega^2}{c^2} = 0.$$

2) On met en œuvre la méthode n° 1.

L'onde n'est pas une OPPH. On utilise donc l'équation de Maxwell-Ampère :  $\operatorname{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ .

On obtient :

$$- \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial y} \vec{u}_x - \frac{\partial E_z}{\partial x} \vec{u}_y = k_2 E_0 \sin(k_1 x) \sin(\omega t - k_2 y) \vec{u}_x - k_1 E_0 \cos(k_1 x) \cos(\omega t - k_2 y) \vec{u}_y.$$

Ceci donne :

$$\vec{B} = \frac{k_2}{\omega} E_0 \sin(k_1 x) \cos(\omega t - k_2 y) \vec{u}_x - \frac{k_1}{\omega} E_0 \cos(k_1 x) \sin(\omega t - k_2 y) \vec{u}_y.$$

3)a) Pour étudier les conditions satisfaites par le champ électromagnétique, il faut utiliser les relations de continuité.


Les conducteurs sont parfaits puisqu'infiniment conducteurs. Le champ électromagnétique est donc nul dans les conducteurs.

Le champ électrique est tangent aux plans d'équations  $x = 0$  et  $x = a$ . Or, les composantes tangentiels du champ électrique sont continues.

Donc 
$$E_x(x = 0) = E_x(x = a) = 0.$$

La composante normale du champ magnétique est continue sur les plans d'équations  $x = 0$  et  $x = a$ .

On en déduit 
$$B_x(x = 0) = B_x(x = a) = 0.$$

 L'étude de la discontinuité de la composante normale du champ électrique permet de déterminer la densité surfacique de charges sur les plans conducteurs. L'étude de la discontinuité des composantes tangentiels du champ magnétique permet de déterminer la densité de courant surfacique qui traverse les conducteurs.



Hidden page

Les équations de Maxwell dans le milieu sont :

$$\text{Équation de Maxwell-Gauss : } \operatorname{div} \vec{E} = 0$$

$$\text{Équation de Maxwell-Faraday : } \operatorname{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{Équation de Maxwell-Flux : } \operatorname{div} \vec{B} = 0$$

$$\text{Équation de Maxwell-Ampère : } \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \epsilon_0 \omega \sqrt{3} \vec{E} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

2) L'équation de propagation est obtenue à partir de l'égalité vectorielle :

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{E}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{E}) - \Delta \vec{E} = - \Delta \vec{E}.$$

Or,  $\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{E}) = \operatorname{rot} \left( - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = - \frac{\partial (\operatorname{rot} \vec{B})}{\partial t}$  car on peut intervertir les dérivées spatiales et temporelles.

De plus,  $\frac{\partial (\operatorname{rot} \vec{B})}{\partial t} = \mu_0 \epsilon_0 \omega \sqrt{3} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$  d'après l'équation de Maxwell-Ampère et  $\frac{1}{c^2} = \epsilon_0 \mu_0$ .

$$\text{On trouve alors : } \Delta \vec{E} - \frac{\omega \sqrt{3}}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}.$$

3) L'onde se propage dans la direction et le sens de l'axe  $Ox$  donc le vecteur d'onde est  $\vec{k} = k \vec{u}_x$ .

L'onde est polarisée rectilignement dans la direction de l'axe  $Oz$ , c'est-à-dire  $\vec{E} = E_0 e^{j(\omega t + kx)} \vec{u}_z$ .

De plus, le champ est maximal et égal à  $E_0$  à l'instant  $t = 0$  pour  $x = 0$  donc  $E_0 = E_0$ .

$$\text{Ceci donne : } \vec{E} = E_0 e^{j(\omega t + kx)} \vec{u}_z.$$

4) La relation de dispersion est obtenue en remplaçant le champ électrique par son expression dans l'équation de propagation.

$$\text{On a : } \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} - \frac{\omega \sqrt{3}}{c^2} \frac{\partial E_z}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = 0 \text{ qui donne : } -k^2 - j \frac{\omega \sqrt{3}}{c^2} + \frac{\omega^2}{c^2} = 0.$$

$$\text{La relation de dispersion est donc : } k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} (1 - j \sqrt{3}).$$

$$5) \text{ On remarque que } \frac{1 - j \sqrt{3}}{2} = e^{-j \frac{\pi}{3}} \text{ ce qui permet de conclure } k = \pm \frac{\sqrt{2} \omega}{c} e^{-j \frac{\pi}{6}},$$

$$\text{soit } k = \pm \frac{\omega}{\sqrt{2} c} (\sqrt{3} - j).$$

**La partie réelle de  $k$  donne par son signe le sens de propagation de l'onde. Si elle est non nulle, l'onde se propage.**

**La partie imaginaire de  $k$  représente l'amortissement de l'amplitude de l'onde au cours de la propagation dans le milieu.**

6) La propagation a lieu dans le sens de l'axe  $Ox$ , ce qui signifie que la partie réelle de  $k$  est positive.

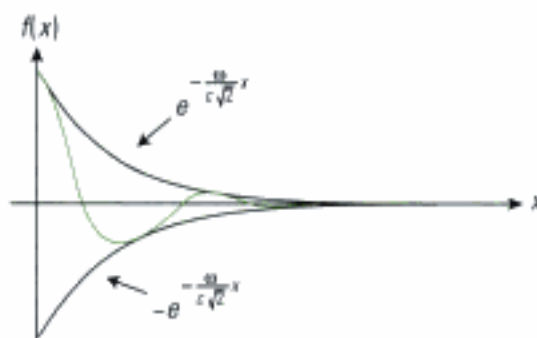
$$\text{Donc } k = \pm \frac{\omega}{\sqrt{2} c} (\sqrt{3} - j), \text{ ce qui donne } \vec{E} = E_0 e^{j(\omega t - \frac{\omega}{\sqrt{2} c} (\sqrt{3} - j)x)} \vec{u}_z.$$

On obtient :

$$\vec{E} = E_0 e^{-\frac{\omega}{\sqrt{2} c} x} e^{j(\omega t - \frac{\sqrt{3} \omega}{\sqrt{2} c} x)} \vec{u}_z.$$

7) En notation réelle, on a  $\vec{E} = E_0 e^{-\frac{\omega}{\sqrt{2}c}x} \cos\left(\omega t - \frac{\sqrt{3}\omega}{\sqrt{2}c}x\right) \vec{u}_x$ .

On trace la fonction  $f(x) = E_0 e^{-\frac{\omega}{\sqrt{2}c}x} \cos\left(\omega t - \frac{\sqrt{3}\omega}{\sqrt{2}c}x\right)$  :



On obtient un champ électrique sinusoïdal dont l'amplitude diminue de manière exponentielle lorsque l'onde pénètre dans la haute atmosphère.

8) La vitesse de phase est la vitesse de déplacement de la phase qui est ici  $\varphi = \omega t - \frac{\sqrt{3}\omega}{\sqrt{2}c}x$ .

On trouve alors  $v_\varphi = \frac{\omega}{\text{Re}(k)} = \frac{\sqrt{2}c}{\sqrt{3}} < c$ .

La vitesse de phase est inférieure à la vitesse de la lumière.

9) On met en œuvre la méthode n° 1.

L'onde est une OPPH amortie donc  $\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} = -\frac{\sqrt{2}}{c} e^{-j\frac{\pi}{6}} E_0 e^{-\frac{\omega}{\sqrt{2}c}x} e^{j\left(\omega t - \frac{\sqrt{3}\omega}{\sqrt{2}c}x\right)} \vec{u}_y$ .

D'où :

$$\vec{B} = -\frac{\sqrt{2}}{c} E_0 e^{-\frac{\omega}{\sqrt{2}c}x} e^{j\left(\omega t - \frac{\sqrt{3}\omega}{\sqrt{2}c}x - \frac{\pi}{6}\right)} \vec{u}_y \text{ et } \vec{B} = -\frac{\sqrt{2}}{c} E_0 e^{-\frac{\omega}{\sqrt{2}c}x} \cos\left(\omega t - \frac{\sqrt{3}\omega}{\sqrt{2}c}x - \frac{\pi}{6}\right) \vec{u}_y.$$

10)a) Le vecteur de Poynting est  $\vec{R} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$ .

$$\text{D'où } \vec{R} = \frac{\sqrt{2}}{\mu_0 c} E_0^2 e^{-\frac{2\omega}{\sqrt{2}c}x} \cos\left(\omega t - \frac{\sqrt{3}\omega}{\sqrt{2}c}x - \frac{\pi}{6}\right) \cos\left(\omega t - \frac{\sqrt{3}\omega}{\sqrt{2}c}x\right) \vec{u}_x.$$

$$\text{Ce qui donne } \vec{R} = \frac{\sqrt{2}}{2\mu_0 c} E_0^2 e^{-\frac{2\omega}{\sqrt{2}c}x} \left[ \cos\left(2\omega t - \frac{\sqrt{6}\omega}{c}x - \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \right] \vec{u}_x.$$

On obtient alors la valeur moyenne du vecteur de Poynting :

$$\langle \vec{R} \rangle = \frac{\sqrt{2}}{2\mu_0 c} E_0^2 e^{-\frac{2\omega}{\sqrt{2}c}x} \cos \frac{\pi}{6} \vec{u}_x = \frac{\sqrt{6}}{4\mu_0 c} E_0^2 e^{-\frac{2\omega}{\sqrt{2}c}x} \vec{u}_x.$$

10)b) La densité volumique d'énergie transportée par cette onde est  $\frac{dW}{d\tau} = \epsilon_0 \frac{E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}$ .

Ceci donne :

$$\frac{dW}{d\tau} = \frac{\epsilon_0}{2} \left( E_0 e^{-\frac{\omega}{\sqrt{2}c}x} \cos\left(\omega t - \frac{\sqrt{3}\omega}{\sqrt{2}c}x\right) \right)^2 + \frac{1}{2\mu_0} \left( \frac{\sqrt{2}}{c} E_0 e^{-\frac{\omega}{\sqrt{2}c}x} \cos\left(\omega t - \frac{\sqrt{3}\omega}{\sqrt{2}c}x - \frac{\pi}{6}\right) \right)^2.$$

Avec  $\frac{1}{\mu_0 c^2} = \epsilon_0$ , on obtient :

$$\frac{dW}{d\tau} = \frac{\epsilon_0}{2} E_0^2 e^{-\frac{2\omega}{\sqrt{2}c}x} \left( \cos^2\left(\omega t - \frac{\sqrt{3}\omega}{\sqrt{2}c}x\right) + 2 \cos^2\left(\omega t - \frac{\sqrt{3}\omega}{\sqrt{2}c}x - \frac{\pi}{6}\right) \right).$$



On trouve, en valeur moyenne :

$$\left\langle \frac{dW}{d\tau} \right\rangle = \frac{3\epsilon_0}{4} E_0^2 e^{-\frac{2\omega}{\sqrt{2}c}x}.$$

10)c) On considère le volume  $Sdx$ . La quantité d'énergie électromagnétique comprise dans ce volume est  $\epsilon = \left\langle \frac{dW}{d\tau} \right\rangle S dx = \frac{3\epsilon_0}{4} E_0^2 e^{-\frac{2\omega}{\sqrt{2}c}x} S dx$ .

Cette quantité d'énergie dans le volume  $Sdx$  est aussi la quantité d'énergie qui a traversé la section  $S$  pendant un temps  $dt$  tel que  $dx = v_e dt$  où  $v_e$  représente la vitesse de propagation de l'énergie.

$$\text{On en conclut } \epsilon = \langle \mathbf{R} \rangle S dx = \frac{\sqrt{6}}{4\mu_0 c} E_0^2 e^{-\frac{2\omega}{\sqrt{2}c}x} S dt.$$

10)d) Comme,  $dx = v_e dt$  et  $\epsilon = \frac{3\epsilon_0}{4} E_0^2 e^{-\frac{2\omega}{\sqrt{2}c}x} S dx = \frac{\sqrt{6}}{4\mu_0 c} E_0^2 e^{-\frac{2\omega}{\sqrt{2}c}x} S dt$ , il vient :

$$v_e = \frac{\sqrt{2} c}{\sqrt{3}}.$$

La vitesse de propagation de l'énergie dans la haute atmosphère est donc :  $v_e = \frac{\sqrt{2} c}{\sqrt{3}}$ .

Cette vitesse est égale à la vitesse de phase. Elle correspond à la vitesse de propagation de l'onde.

## Exercice 18

1) Le dipôle oscillant est étudié dans la zone de rayonnement, c'est-à-dire en un point  $M$  situé à une distance  $r$  du point  $O$  telle que  $r \gg a$  et  $r \gg \lambda$ .

2)a) D'après l'énoncé, on a  $\vec{OP}(t) = a \cos(\omega t) \vec{u}_z$  puisque le mouvement de la particule de charge  $q$  est sinusoïdal et maximal à l'instant  $t = 0$ .

On exprime alors ce mouvement dans la base sphérique  $\vec{OP}(t) = a \cos(\omega t) (\cos\theta \vec{u}_r - \sin\theta \vec{u}_\theta)$ .

On obtient alors :

$$\vec{E} = -\frac{\mu_0 q \omega^2 a}{4\pi r} \sin\theta \cos\left(\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right) \vec{u}_\theta \text{ et } \vec{B} = -\frac{\mu_0 q \omega^2 a}{4\pi r} \sin\theta \cos\left(\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right) \vec{u}_\phi.$$

2)b) Le champ électrique a une direction fixe. **L'onde est polarisée rectiligne** suivant  $\vec{u}_\theta$ .

2)c) Le champ électrique est de la forme  $\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM}) \vec{u}_\theta$  où  $\vec{k}$  est le vecteur d'onde.

On en déduit  $\vec{k} = \frac{\omega}{c} \vec{u}_r$ .

3)a) Le vecteur de Poynting est  $\vec{R} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$ .

$$\text{D'où } \vec{R} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{\mu_0}{c} \left( \frac{q\omega^2 a}{4\pi r} \sin\theta \right)^2 \cos^2\left(\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right) \vec{u}_r.$$

▲ On rappelle que :  $\langle \cos^2 \rangle = \frac{1}{2}$ .

$$\text{On obtient alors : } \langle \mathbf{R} \rangle = \frac{\mu_0}{2c} \left( \frac{q\omega^2 a}{4\pi r} \sin\theta \right)^2.$$

3)b) La puissance moyenne rayonnée est la puissance qui traverse la sphère soit

$$P = \iint_{\text{Sphère}} \langle \mathbf{R} \rangle \cdot d\vec{S} \text{ où } d\vec{S} = r^2 \sin\theta d\theta d\phi.$$

Hidden page

Hidden page



# Quelques problèmes

## Introduction

Ce chapitre est composé de deux problèmes qui abordent l'ensemble des notions étudiées dans cet ouvrage.

### Plan du chapitre 5

Problème 1. <i>Champ électromagnétique dans un condensateur plan cylindrique</i> . . .	270
<i>Solution</i> . . . . .	273
Problème 2. <i>Chute d'un aimant dans un tuyau métallique</i> . . . . .	278
<i>Solution</i> . . . . .	280

# Problèmes

## Problème 1 : champ électromagnétique dans un condensateur plan cylindrique

Un condensateur plan est constitué par des armatures métalliques circulaires de rayon  $R$  et de même axe  $\Delta = x'z$ , séparées d'une hauteur  $h$  (fig. 1). Ce condensateur est soumis à une tension alternative donnée, de fréquence  $f = \frac{\omega}{2\pi}$ , qui produit à l'instant  $t$  dans l'espace vide entre les armatures un champ  $\vec{E}_0 = \vec{e}_0 \cos \omega t$  uniforme, sinusoïdal dans le temps et axial (c'est-à-dire parallèle à l'axe  $\Delta$ ), qu'on écrit en notation complexe :  $\vec{E}_0 = e_0 e^{j\omega t} \vec{u}_z$  où  $e_0 > 0$  est l'amplitude du champ  $\vec{E}_0$ .

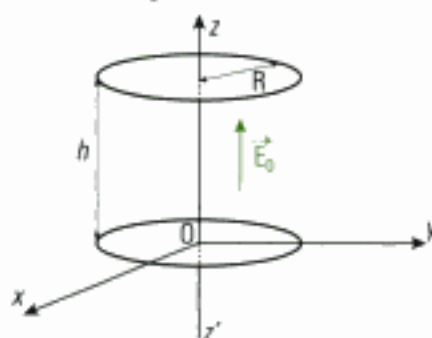


Fig. 1

Le champ électrique  $\vec{E}_0$  crée un champ magnétique  $\vec{B}_1$ , lequel engendre un champ électrique  $\vec{E}_2$ , qui crée à son tour un champ magnétique  $\vec{B}_2$ , qui engendre  $\vec{E}_3$ , etc.

Dans tout le problème, on négligera les effets de bord. On travaille en coordonnées cylindriques  $(\rho, \theta, z)$ .

### 1) Calcul des champs $\vec{B}_1$ et $\vec{E}_2$

a) Les variations dans le temps du champ électrique  $\vec{E}_0$  créent un champ magnétique  $\vec{B}_1$ .

On veut calculer  $\vec{B}_1$ .

a1) En un point  $M$  entre les plaques, donner l'équation de Maxwell que satisfait  $\vec{B}_1(M, t)$  en fonction de  $\omega$ ,  $c$  (la vitesse de la lumière dans le vide) et  $\vec{E}_0$ .

a2) On se place en coordonnées cylindriques. Montrer que  $\vec{B}_1(M, t)$  est orthoradial (c'est-à-dire dirigé selon  $\vec{u}_\theta$ ). Quel est son sens au temps  $t$  ?

a3) Soit le cercle  $C_1$  parallèle au plan  $xOy$ , centré sur  $\Delta$  et passant par  $M$ . Calculer la circulation  $\oint_{C_1} \vec{B}_1 \cdot d\vec{l}$  de  $\vec{B}_1$  sur le contour  $C_1$  qu'on orientera comme  $\vec{B}_1$ .

En déduire l'expression de  $\vec{B}_1(M, t)$  en fonction de  $c$ ,  $X = \frac{\omega \rho}{2c}$  et  $\vec{E}_0$ . Quelle est la dimension de  $X$  ?

b) Les variations dans le temps du champ magnétique  $\vec{B}_1$  créent un champ électrique  $\vec{E}_2$ . On veut calculer  $\vec{E}_2$ .

b1) Quelle relation lie  $\vec{E}_2$  à  $\vec{B}_1$  ? En déduire l'équation de Maxwell satisfaite par  $\vec{E}_2(M, t)$  en fonction de  $c$ ,  $X$ ,  $\omega$  et  $\vec{E}_0$ .

b2) Sans faire de calculs, montrer que l'on peut supposer  $\vec{E}_2$  axial.

b3) Soit le contour orienté rectangulaire  $C_2$  (fig. 2) dans un plan méridien :

Calculer la circulation  $\oint_{C_2} \vec{E}_2 \cdot d\vec{l}$  de  $\vec{E}_2$  sur  $C_2$ .

En déduire l'expression de  $\vec{E}_2(M, t)$  en fonction de  $X$  et  $\vec{E}_0$  en prenant  $\vec{E}_2(\rho = 0) = \vec{0}$ .

Justifier ce choix.

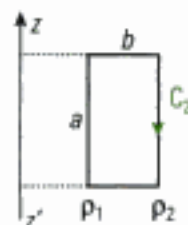


Fig. 2

### 2) Comportement à basse fréquence

À basse fréquence ( $X \ll 1$ ), on néglige les termes en  $X$  de degré supérieur à 2.

a) Exprimer, dans ces conditions, le champ magnétique total  $\vec{B}_{\text{eff}}(M, t)$  et le champ électrique total  $\vec{E}_{\text{eff}}(M, t)$  qui règnent en  $M$  à l'instant  $t$  à l'intérieur du condensateur, en fonction de  $c$ ,  $X$  et  $\vec{E}_0$ .

b) Étude énergétique

b1) Calculer la densité volumique instantanée  $\epsilon_e(t)$  d'énergie électrique et la densité volumique instantanée  $\epsilon_m(t)$  d'énergie magnétique dans le condensateur en fonction de  $\epsilon_0$  (la permittivité du vide),  $X$ ,  $\omega$  et  $\vec{E}_0$ .

b2) On note  $\langle \epsilon_{e,m}(t) \rangle_t$  les moyennes temporelles correspondantes. Exprimer, en fonction de  $X$ , le rapport  $\frac{\langle \epsilon_m \rangle_t}{\langle \epsilon_e \rangle_t}$ . Que concluez-vous ?

c) Puissance rayonnée

c1) Soit  $\vec{P}$  le vecteur de Poynting associé à ce champ électromagnétique. Calculer  $\vec{P}$  à l'ordre le plus bas en  $X$ , en fonction de  $\epsilon_0$ ,  $c$ ,  $X$ ,  $\omega$  et  $\vec{E}_0$ .

c2) En déduire que les échanges par rayonnement se limitent à la surface latérale du condensateur. Calculer la puissance rayonnée instantanée  $P(t)$  et en déduire  $\langle P(t) \rangle_t$ . Comment interprétez-vous ce résultat ?

### 3) Comportement à haute fréquence

À haute fréquence, on ne peut plus négliger les termes en  $X$  de degré supérieur à 2. On va donc calculer  $\vec{B}_3$  dont  $\vec{E}_2$  est la source,  $\vec{E}_4$  dont  $\vec{B}_3$  est la source, etc.

a) Donner l'orientation de  $\vec{B}_3$ . Quelle est l'équation satisfaite par  $\vec{B}_3$ ? Calculer  $\oint_{C_1} \vec{B}_3 \cdot d\vec{l}$  et en déduire l'expression de  $\vec{B}_3(M, t)$  en fonction de  $c$ ,  $X$  et  $E_0$ .

b) Calculer  $\vec{E}_4(M, t)$ .

c) Expression des champs  $\vec{E}_{2n}$  et  $\vec{B}_{2n+1}$ .

c1) On veut calculer par récurrence l'expression de  $\vec{E}_{2n}$ .

On suppose que :  $\vec{E}_{2n}(M, t) = \frac{1}{(n!)^2} (iX)^{2n} \vec{E}_0(t)$ . En déduire  $\vec{B}_{2n+1}(M, t)$ .

c2) Calculer alors  $\vec{E}_{2n+2}(M, t)$ . Que concluez-vous ?

d) Étude du champ électrique

d1) Montrer que le champ électrique total  $\vec{E}(M, t)$  qui règne à l'intérieur du condensateur s'exprime simplement en fonction de  $\vec{E}_0(M, t)$  et de la fonction de Bessel  $J_0(x)$  (donnée en annexe), à condition d'attribuer à  $x$  une expression littérale qu'on explicitera.

d2) Décrire la configuration du champ  $\vec{E}(M, t)$  et examiner ses variations en fonction de  $\omega$ . Montrer qu'à la périphérie du condensateur, certaines valeurs de  $\omega$  annulent le champ électrique.

e) Réalisation d'une cavité

On ferme le condensateur au niveau de sa surface latérale  $\rho = R$  par une feuille d'aluminium assimilé à un conducteur parfait. On cherche les fréquences propres de la cavité ainsi constituée, c'est-à-dire les fréquences particulières permettant l'existence d'une onde décrite par  $\vec{E} = \sum_n \vec{E}_{2n}$  avec les notations du paragraphe précédent.

e1) Quelles sont les conditions aux limites imposées aux champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  par la présence de la feuille d'aluminium ?

e2) Quelles sont les pulsations possibles pour le champ électromagnétique dans cette cavité cylindrique ?

e3) On excite la cavité à l'aide d'un générateur électrique délivrant une tension sinusoïdale de fréquence  $f$  aux bornes du condensateur. On constate expérimentalement que l'amplitude du champ dans la cavité prend des valeurs très importantes pour certaines fréquences  $f_r$ . Comment appelle-t-on ce phénomène ?

e4) Calculer la fréquence  $f_1$  la plus basse du champ  $\vec{E}_0$  dans la cavité pour  $R = 4 \cdot 10^{-2}$  m. On donne  $c = 3 \cdot 10^8$  m·s<sup>-1</sup>.

### 4) Calcul direct du champ électrique total $\vec{E}$

Au lieu de calculer le champ total sous forme d'une série, on souhaite calculer directement le champ électrique  $\vec{E}$  qui règne entre les armatures.

a) Obtenir l'équation générale de propagation qui relie les dérivées partielles du champ électrique.

b) On cherche à cette équation une solution axiale, ayant la symétrie du cylindre (invariance par rotation et par translation selon l'axe de révolution), qu'on écrit en notation complexe :

$$\vec{E}(M, t) = E(\rho) \exp(i\omega t) \vec{u}_z.$$

Donner l'équation différentielle du second ordre satisfaite par la fonction scalaire  $E(\rho)$  pour une fréquence donnée.

On rappelle que le laplacien d'une fonction exprimée en coordonnées cylindriques de la forme :

$$\vec{U}(M, t) = U(\rho, t) \vec{u}_z$$

vaut :

$$\Delta \vec{U}(M, t) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial U(\rho, t)}{\partial \rho} \right) \vec{u}_z.$$

c) Montrer, par un changement de variable judicieux, que cette équation différentielle peut s'écrire :

$$\left( \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d}{dx} + 1 \right) E(x) = 0.$$

d) Montrer qu'on obtient la même solution que précédemment.

### ANNEXE : LES FONCTIONS DE BESSEL

Les fonctions de Bessel  $B_v(x)$  sont des solutions de l'équation différentielle :

$$\frac{d^2 B_v(x)}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dB_v(x)}{dx} + \left( 1 - \frac{v^2}{x^2} \right) B_v(x) = 0$$

$$\forall v \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{C}.$$

Les fonctions de Bessel de première espèce  $J_v(x)$  sont définies par la série :

$$J_v(x) = \left( \frac{x}{2} \right)^v \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(v+k+1)} \left( \frac{x}{2} \right)^{2k},$$

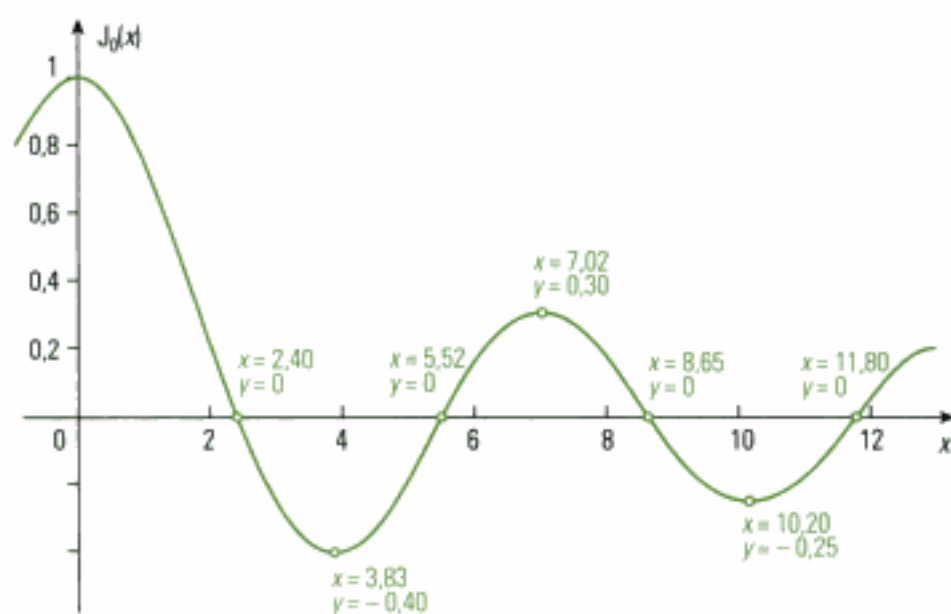
pour  $x$  tel que  $|\arg x| < \pi$ , où  $\Gamma$  est la fonction qui généralise la fonction factorielle.

Dans le cas particulier  $v = 0$ , nous avons :

$$J_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left( \frac{x}{2} \right)^{2k}.$$

Pour  $x$  réel, le graphe de la fonction  $J_0(x)$  est, pour  $x > 0$ , le suivant :





*Tiré du concours ENSAM - ESTP - ENSAIS Filière PSI 1998*

## Solution du problème 1

1) a) a1) L'équation de Maxwell permettant de déterminer le champ magnétique engendré par une variation temporelle du champ électrique est l'équation de Maxwell-Ampère :

$$\text{rot } \vec{B}_1(M, t) = \mu_0 \vec{j}(M, t) + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}_0(M, t)}{\partial t}.$$

Or,  $\mu_0 \epsilon_0 = \frac{1}{c^2}$  et en un point M entre les plaques, il n'y a pas de courant, donc :

$$\text{rot } \vec{B}_1(M, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}_0(M, t)}{\partial t} = i \frac{\omega}{c^2} \vec{E}_0(M, t).$$

a2) Le champ électrique possède la symétrie cylindrique. Donc le plan  $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$  est plan de symétrie du système. Le champ magnétique est normal à ce plan et donc orthoradial.

Entre les plaques du condensateur, le champ électrique est invariant par rotation d'angle  $\theta$ . Donc le champ magnétique est indépendant de  $\theta$ .

$$\vec{B}_1(M, t) = B_1(\rho, z, t) \vec{u}_\theta.$$

À l'instant  $t$ , le rotationnel du champ magnétique est :

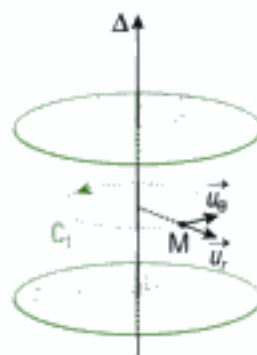
$$\text{rot } \vec{B}_1(M, t) = i \frac{\omega}{c^2} \epsilon_0 e^{j\omega t} \vec{u}_z, \text{ soit } \text{rot } \vec{B}_1(M, t) = -\frac{\omega}{c^2} \epsilon_0 \sin \omega t \vec{u}_z.$$

• Si  $\sin \omega t \geq 0$ , soit si  $t \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[ kT; (k + \frac{1}{2})T \right]$  avec  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ ,  $\text{rot } \vec{B}_1(M, t)$  est dirigé selon  $-\vec{u}_z$  et alors  $\vec{B}_1(M, t)$  est dirigé selon  $-\vec{u}_\theta$ .

En effet, si on appelle  $C_1$  le cercle parallèle au plan  $xOy$ , centré sur  $\Delta$  et de rayon  $\rho$  et  $S_1$  le disque associé, alors la formule de Stokes fournit :

$$0 > \iint_{S_1} \text{rot } \vec{B}_1 \cdot d\vec{S} \vec{u}_z = \iint_{S_1} \text{rot } \vec{B}_1 \cdot d\vec{S} = \oint_{C_1} \vec{B}_1 \cdot d\vec{l} = \oint_{C_1} \vec{B}_1 \cdot \rho d\theta \vec{u}_\theta = 2\pi \rho B_1(\rho, z, t).$$

• Si  $\sin \omega t < 0$ , soit si  $t \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[ (k + \frac{1}{2})T; kT \right]$ ,  $\text{rot } \vec{B}_1(M, t)$  est dirigé selon  $\vec{u}_z$  et alors  $\vec{B}_1(M, t)$  est dirigé selon  $\vec{u}_\theta$ .



a3) On considère le cercle  $C_1$  représenté sur le schéma précédent. On prend  $d\vec{l} = \rho d\theta \vec{u}_\theta$  où  $\rho$  est le rayon de  $C_1$ . On obtient alors :

$$\oint_{C_1} \vec{B}_1 \cdot d\vec{l} = 2\pi \rho B_1(\rho, z, t).$$

On utilise la formule de Stokes :  $\oint_{C_1} \vec{B}_1 \cdot d\vec{l} = \iint_{S_1} \text{rot } \vec{B}_1 \cdot d\vec{S} = \iint_{S_1} i \frac{\omega}{c^2} \vec{E}_0 \cdot d\vec{S}$ . La surface  $S_1$  est bien orientée selon  $\vec{u}_z$  puisque  $d\vec{l} = \rho d\theta \vec{u}_\theta$ .

On obtient  $2\pi \rho B_1(\rho, z, t) = i \frac{\omega}{c^2} E_0 \pi \rho^2$ , soit

$$B_1(\rho, z, t) = i \frac{\omega \rho}{2c^2} E_0 = i \frac{X}{c} E_0 \quad \text{qui est indépendant de } z.$$

$\omega \rho$  s'exprime en  $m \cdot s^{-1}$  comme  $c$  donc  $X$  est sans dimension.

b) b1) L'équation de Maxwell permettant de déterminer le champ électrique engendré par une variation temporelle du champ magnétique est l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\text{rot } \vec{E}_2(M, t) = -\frac{\partial \vec{B}_1(M, t)}{\partial t} = \frac{X\omega}{c} E_0 \vec{u}_\theta.$$

**b2)** Le champ  $\vec{E}_2(M, t)$  possède les mêmes invariances que le champ  $\vec{B}_1(M, t)$  dont il découle et ne dépend donc que de la variable  $\rho$ .

$$\text{D'où : } \vec{\text{rot}} \vec{E}_2(M, t) = -\frac{\partial \vec{E}_{2z}}{\partial \rho} \vec{u}_\theta + \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho \vec{E}_{2\theta})}{\partial \rho} \vec{u}_z = \frac{X\omega}{c} \vec{E}_0 \vec{u}_\theta.$$

Le champ électrique possède donc une composante suivant  $\vec{u}_z$ .

La composante selon  $\vec{u}_\theta$  est telle que  $\frac{\partial(\rho \vec{E}_{2\theta})}{\partial \rho} = 0$  soit  $E_{2\theta} = \frac{K}{\rho}$  où  $K$  est une constante.

Physiquement, il est impossible que le champ électrique diverge sur l'axe, il n'a donc pas de composante suivant  $\vec{u}_\theta$ .

De plus,  $\text{div} \vec{E}_2 = 0 = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho \vec{E}_{2\theta})}{\partial \rho} \vec{u}_\rho$ . Par le même raisonnement, on montre que la composante du champ électrique selon  $\vec{u}_\theta$  est nulle.

Donc : 
$$\vec{E}_2(M, t) = E_2(\rho, t) \vec{u}_z.$$

**b3)** La circulation du champ électrique  $\vec{E}_2$  est non nulle uniquement suivant les portions du contour parallèles à l'axe :  $d\vec{l} = dl \vec{u}_z$  pour  $\rho = \rho_1$  et pour  $\rho = \rho_2$ . On obtient alors :

$$\oint_{C_2} \vec{E}_2 \cdot d\vec{l} = a[E_2(\rho_1, t) - E_2(\rho_2, t)].$$

On utilise la formule de Stokes :  $\oint_{C_2} \vec{E}_2 \cdot d\vec{l} = \iint_{S_2} \vec{\text{rot}} \vec{E}_2 \cdot d\vec{S} = - \iint_{S_2} \frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t} \cdot d\vec{S}$  où  $S_2$  est la surface plane du contour  $C_2$ . On oriente cette surface selon  $\vec{u}_\theta$  du fait de l'orientation du contour.

On obtient alors :

$$a[E_2(\rho_1, t) - E_2(\rho_2, t)] = \int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{\omega^2}{2c^2} E_0 \rho d\rho \int_0^a dz = \frac{\omega^2 a}{4c^2} E_0 (\rho_2^2 - \rho_1^2).$$

En prenant  $\rho_1 = 0$ , on a donc : 
$$E_2(\rho, t) = -X^2 E_0.$$

On s'intéresse au champ engendré par une variation temporelle, il est donc logique de ne pas y introduire de grandeur constante, d'où le choix  $E_2(\rho = 0) = 0$ .

**2) a)** Le champ magnétique engendré par  $\vec{E}_2(M, t)$  peut être négligé. On néglige donc les champs magnétique et électrique qui en découlent.

D'où : 
$$\vec{B}_{\text{BF}}(M, t) = \vec{B}_1(M, t) = i \frac{X}{c} E_0 \vec{u}_\theta$$

et 
$$\vec{E}_{\text{BF}}(M, t) = \vec{E}_0(M, t) + \vec{E}_2(M, t) = (1 - X^2) E_0 \vec{u}_z.$$

**b) b1)** Pour déterminer les énergies, il faut prendre les expressions temporelles des champs :

$$\vec{B}_{\text{BF}}(M, t) = -\frac{X}{c} e_0 \sin \omega t \vec{u}_\theta \quad \text{et} \quad \vec{E}_{\text{BF}}(M, t) = (1 - X^2) e_0 \cos \omega t \vec{u}_z.$$

D'où : 
$$\epsilon_e(t) = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_{\text{BF}}^2 = \frac{\epsilon_0}{2} (1 - X^2)^2 e_0^2 \cos^2 \omega t$$

et : 
$$\epsilon_m(t) = \frac{1}{2\mu_0} B_{\text{BF}}^2 = \frac{1}{2\mu_0 c^2} X^2 e_0^2 \sin^2 \omega t = \frac{\epsilon_0}{2} X^2 e_0^2 \sin^2 \omega t.$$

**b2)** La valeur moyenne est définie par  $\langle \epsilon_e(t) \rangle_t = \frac{1}{T} \int_0^T \epsilon_e(t) dt$  où  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ .

On obtient  $\langle \epsilon_e(t) \rangle_t = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\epsilon_0}{2} (1 - X^2)^2 e_0^2 \cos^2 \omega t dt$  et  $\langle \epsilon_m(t) \rangle_t = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\epsilon_0}{2} X^2 e_0^2 \sin^2 \omega t dt$ .

Or,  $\frac{1}{T} \int_0^T \cos^2 \omega t dt = \frac{1}{T} \int_0^T \left( \frac{1 + \cos(2\omega t)}{2} \right) dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{4T\omega} [\sin(2\omega t)]_0^T = \frac{1}{2}$



Hidden page

b) On utilise la même méthode qu'à la question 1) b) :

$$\text{rot } \vec{E}_4(M, t) = - \frac{\partial \vec{B}_3(M, t)}{\partial t} = - \frac{X^3 \omega}{2c} \vec{E}_0 \vec{u}_x.$$

Or  $\vec{E}_4(M, t) = \vec{E}_4(\rho, t) \vec{u}_x$ , d'où  $\oint_{C_2} \vec{E}_4 \cdot d\vec{l} = a[E_4(\rho_1, t) - E_4(\rho_2, t)]$ .

On utilise la formule de Stokes :  $\oint_{C_2} \vec{E}_4 \cdot d\vec{l} = \iint_{S_2} \text{rot } \vec{E}_4 \cdot d\vec{S} = - \iint_{S_2} \frac{\partial \vec{B}_3}{\partial t} \cdot d\vec{S}$ . On obtient alors :

$$a[E_4(\rho_1, t) - E_4(\rho_2, t)] = - \int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{\omega^4}{16c^4} \vec{E}_0 \rho^3 d\rho \int_0^a dz = - \frac{\omega^4 a}{64c^4} \vec{E}_0 (\rho_2^4 - \rho_1^4).$$

On prend  $\rho_1 = 0$  et  $E_4(\rho = 0) = 0$  donc  $E_4(\rho, t) = \frac{X^4}{4} \vec{E}_0 \vec{u}_x$ .

c) c1) D'après l'étude précédente (question 3) a)), en prenant toujours le même cercle  $C_1$ , on a :

$$\begin{aligned} 2\pi\rho B_{2n+1}(\rho, z, t) &= \oint_{C_1} \vec{B}_{2n+1} \cdot d\vec{l} = \iint_{S_1} \text{rot } \vec{B}_{2n+1} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_1} i \frac{\omega}{c^2} \vec{E}_{2n} \cdot d\vec{S} \\ &= 2\pi(i)^{2n+1} \frac{\omega^{2n+1}}{c^2(n!)^2(2c)^{2n}} \vec{E}_0 \int_0^\rho \rho'^{2n+1} d\rho' = \pi(i)^{2n+1} \frac{\omega^{2n+1} \rho^{2n+1}}{(n+1)c^2(n!)^2(2c)^{2n}} \vec{E}_0. \end{aligned}$$

$$\text{Donc } B_{2n+1}(\rho, z, t) = \frac{(iX)^{2n+1}}{c(n+1)(n!)^2} \vec{E}_0.$$

c2) D'après l'étude précédente (question 3) b)), en prenant toujours le même contour  $C_2$ , on a :

$$\begin{aligned} a[E_{2n+2}(\rho_1, t) - E_{2n+2}(\rho_2, t)] &= \oint_{C_2} \vec{E}_{2n+2} \cdot d\vec{l} = \iint_{S_2} \text{rot } \vec{E}_{2n+2} \cdot d\vec{S} = - \iint_{S_2} \frac{\partial \vec{B}_{2n+1}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \\ &= - (i)^{2n+2} \frac{\omega^{2n+2} a}{(n+1)c(n!)^2(2c)^{2n+1}} \vec{E}_0 \int_{\rho_1}^{\rho_2} \rho^{2n+1} d\rho \\ &= - (i)^{2n+2} \frac{\omega^{2n+2} a}{(n+1)^2(n!)^2(2c)^{2n+2}} (\rho_2^{2n+2} - \rho_1^{2n+2}). \end{aligned}$$

On prend  $\rho_1 = 0$  et  $E_{2n+2}(\rho = 0) = 0$  d'où :

$$\vec{E}_{2(n+1)}(\rho, t) = \frac{(iX)^{2(n+1)}}{[(n+1)!]^2} \vec{E}_0.$$

On vérifie donc la relation de récurrence.

$$\text{d) d1) On a } \vec{E}(M, t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \vec{E}_{2n}(M, t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(iX)^{2n}}{(n!)^2} \vec{E}_0 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n X^{2n}}{(n!)^2} \vec{E}_0.$$

$$\text{On en déduit } \vec{E}(M, t) = J_0(x) \vec{E}_0 \text{ où } x = \frac{\omega\rho}{c}.$$

d2) Le champ électrique est dirigé suivant  $\vec{u}_x$ . Son amplitude diminue lorsque l'on s'éloigne de l'axe du condensateur.

L'amplitude du champ électrique diminue d'autant plus vite que la pulsation est importante.

L'amplitude du champ électrique s'annule pour  $\rho = R$  lorsque la fonction de Bessel s'annule, c'est-à-dire pour  $\omega = 2,4 \frac{c}{R}$ ,  $\omega = 5,52 \frac{c}{R}$ ,  $\omega = 8,65 \frac{c}{R}$ , ...

e) e1) L'aluminium est considéré comme un conducteur parfait, les champs électrique et magnétique sont donc nuls dans l'aluminium :  $\vec{E}_{\text{alu}} = \vec{0}$  et  $\vec{B}_{\text{alu}} = \vec{0}$ .

Le champ électrique est tangent à la feuille d'aluminium pour  $\rho = R$ . Il est donc continu à l'interface du conducteur. On en conclut  $\vec{E}(\rho = R) = \vec{E}_{\text{alu}} = \vec{0}$ .

Le champ magnétique est tangent à la feuille d'aluminium pour  $\rho = R$ . Il est donc discontinu à l'interface du conducteur si celui-ci comporte une densité de courant surfacique.

On en conclut  $\vec{B}(\rho = R) - \vec{B}_{\text{alu}} = \vec{B}(\rho = R) = -\mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{u}_r$ , où  $\vec{j}_s$  est la densité de courant surfacique sur l'aluminium.

e2) D'après la question 3) d), le champ électrique ne s'annule pour  $\rho = R$  que lorsque la fonction de Bessel s'annule.

Les seules valeurs possibles pour les pulsations sont donc :

$$\omega = 2,4 \frac{c}{R}, \omega = 5,52 \frac{c}{R}, \omega = 8,65 \frac{c}{R}, \dots$$

e3) On appelle cela le **phénomène de résonance**.

e4) Ces fréquences  $f_i$  sont les fréquences correspondant aux valeurs de pulsation qui annulent le champ électrique pour  $\rho = R$ .

Donc :

$$f_1 = 2,4 \frac{c}{2\pi R} = 2,86 \text{ GHz.}$$

4) a) On part de l'égalité vectorielle :  $\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}} \vec{E}) = \vec{\text{grad}}(\text{div} \vec{E}) - \Delta \vec{E}$ .

Or  $\text{div} \vec{E} = 0$  entre les armatures.

De plus, d'après l'équation de Maxwell-Faraday,  $\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}} \vec{E}) = \vec{\text{rot}}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial(\vec{\text{rot}} \vec{B})}{\partial t}$  car on peut intervertir les dérivées spatiales et temporelles.

On en déduit  $\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}} \vec{E}) = -\frac{\partial(\vec{\text{rot}} \vec{B})}{\partial t} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$  par l'équation de Maxwell-Ampère.

Ce qui conduit à l'équation suivante :  $\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$ .

b) On sait que l'on a :  $\Delta \vec{E} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial E(\rho) e^{j\omega t}}{\partial \rho} \right) \vec{u}_\rho = \left( \frac{1}{\rho} \frac{dE(\rho)}{d\rho} + \frac{d^2 E(\rho)}{d\rho^2} \right) e^{j\omega t} \vec{u}_\rho$

et  $-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{\omega^2}{c^2} E(\rho) e^{j\omega t} \vec{u}_\rho$ .

D'où :

$$\frac{1}{\rho} \frac{dE(\rho)}{d\rho} + \frac{d^2 E(\rho)}{d\rho^2} + \frac{\omega^2}{c^2} E(\rho) = 0.$$

c) Posons  $x = \frac{\rho\omega}{c}$ . On obtient l'équation :  $\frac{\omega}{xc} \frac{dE(x)}{d\left(\frac{xc}{\omega}\right)} + \frac{d^2 E(x)}{d\left(\frac{xc}{\omega}\right)^2} + \frac{\omega^2}{c^2} E(x) = 0$ .

On trouve alors  $\frac{\omega^2}{c^2} \left( \frac{1}{x} \frac{dE(x)}{dx} + \frac{d^2 E(x)}{dx^2} + E(x) \right) = 0$ .

On vérifie donc que  $E(x)$  est solution de l'équation :

$$\frac{1}{x} \frac{dE(x)}{dx} + \frac{d^2 E(x)}{dx^2} + E(x) = 0.$$

d) D'après l'annexe, la solution de ce type d'équation fait intervenir les fonctions de Bessel pour  $\nu = 0$ .

La solution est  $J_0(x) e_0$  puisque le champ est égal à  $e_0$  sur l'axe.

Donc :

$$\vec{E}(\mathbf{M}, t) = J_0\left(\frac{\omega\rho}{c}\right) e_0 e^{j\omega t} \vec{u}_z.$$



## Problème 2 : chute d'un aimant dans un tuyau métallique

Ce problème étudie des mouvements de chute dans le champ de pesanteur contrariés par l'existence d'une force de type frottement fluide.

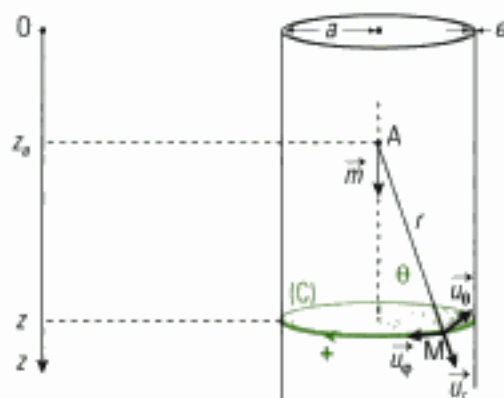
Plus précisément ce problème, où cette force est d'origine magnétique, envisage la chute d'un petit aimant dans un tube métallique.

Le repère terrestre est pris galiléen et le module de l'accélération de la pesanteur est  $g = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ .

L'expérience montre que le temps de chute d'un petit aimant est beaucoup plus important dans un tuyau métallique que dans un tube de verre de même géométrie. Cette partie se propose de comprendre l'origine de ce phénomène et de le quantifier.

Un petit aimant A est lâché sans vitesse initiale du point O ( $z = 0$ ), son moment magnétique  $\vec{m} = m\vec{u}_z$  est au cours du mouvement toujours vertical et dirigé vers le bas. Son abscisse au cours de la chute est notée  $z_a(t)$ , l'axe Oz étant orienté suivant la verticale descendante. Cette chute s'effectue à l'intérieur d'un tuyau métallique creux, d'épaisseur  $e$  faible devant le rayon moyen  $a$ . La conductivité électrique du métal est  $\sigma$ . Les frottements de l'air sont négligés.

L'extrémité supérieure du tuyau est placée en  $z = 0$  et sa longueur est L.



### 1) Courant induit dans un circuit élémentaire

Dans un premier temps il est commode de raisonner sur un circuit (C) de cote  $z$  constitué par le tronçon de tuyau de hauteur  $dz$ . Un point M de cette boucle est repéré par ses coordonnées sphériques d'origine l'aimant A et l'orientation positive du circuit est choisie suivant  $+\vec{u}_\theta$ .

1) a) Expliquer qualitativement l'origine d'un courant  $di$  induit dans le circuit (C) ; prévoir son sens par la loi de Lenz et le représenter sur un dessin. Interpréter alors l'existence d'une force de freinage s'exerçant sur l'aimant.

b) Le potentiel vecteur  $\vec{A}$  créé en un point M du circuit (C) par le dipôle magnétique est donné par l'expression suivante où  $r = AM$  :

$$\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \wedge \vec{u}_r}{r^2}.$$

Représenter le vecteur  $\vec{A}(M)$  et donner ses coordonnées dans la base sphérique en fonction de  $m$ ,  $a$ ,  $z$  et  $z_a$ .

c) Pour quelle raison ce potentiel est-il fonction du temps ?

En déduire l'expression du champ électromoteur  $\vec{E}_m$  en notant  $v = \frac{dz_a}{dt} > 0$  la vitesse de chute de l'aimant :

$$\vec{E}_m(M) = -\frac{3\mu_0}{4\pi} \frac{ma(z - z_a)v}{\sqrt{(a^2 + (z - z_a)^2)^3}} \vec{u}_\theta.$$

Dans la suite ce champ est supposé uniforme sur l'épaisseur  $e$  du métal (car  $e \ll a$ ) ainsi que sur sa hauteur  $dz$ .

d) Déterminer le courant  $di$  induit par ce champ électromoteur dans le circuit (C) par la loi d'Ohm locale et le flux du vecteur densité de courant  $\vec{j}$  à travers une surface adéquate.

Retrouver ce résultat à partir du calcul de la force électromotrice induite  $\mathcal{E}_i$  sachant que la résistance du circuit (C) est  $dR = \frac{2\pi a}{\sigma e dz}$ . On commentera la limite de cette résistance lorsque  $dz$  tend vers zéro. Le signe de  $di$  est-il conforme à la prévision faite à la question a) ?

### 2) Force exercée par le tuyau sur l'aimant

Soit  $\vec{F}$  la force exercée par le tuyau sur l'aimant et  $F_z$  sa projection sur l'axe Oz. Il est plus simple d'évaluer son opposée  $F'_z = -F_z$ , c'est-à-dire la force exercée par l'aimant sur le tuyau.

a) On donne les expressions des composantes  $B_r$  et  $B_\theta$  du champ magnétique (en coordonnées sphériques) créé par le dipôle magnétique A au point M du circuit (C) en fonction de  $m$ ,  $\theta$  et  $r = AM$  :

$$B_r = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{m \cos \theta}{r^3} \quad \text{et} \quad B_\theta = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m \sin \theta}{r^3}.$$



Hidden page

## Solution du problème 2

1) a) • L'aimant est en mouvement par rapport au tuyau. De ce fait, le champ magnétique  $\vec{B}$  qu'il engendre est un champ magnétique variable du point de vue du tuyau. Le tuyau peut être considéré comme un conducteur placé dans un champ magnétique variable, il est donc soumis au phénomène d'induction.

On peut décomposer le tuyau comme un ensemble de cerceau qui forment des circuits fermés. Dans chaque cerceau l'induction engendre un courant induit. On explique alors l'existence de  $di$ .

• D'après la loi de Lenz,  $di$  doit créer un champ magnétique qui s'oppose à la variation du champ créé par l'aimant.

L'aimant se dirige vers le bas :

➤ si  $z > z_a$ , le champ magnétique dirigé suivant  $\vec{u}_z$ , sur l'axe, croît au cours du temps. Le courant  $di$  doit donc engendrer un champ magnétique dirigé suivant  $-\vec{u}_z$ . Il est alors orienté dans le sens négatif sur la figure de l'énoncé.

➤ si  $z < z_a$ , le champ magnétique dirigé suivant  $\vec{u}_z$ , sur l'axe, décroît au cours du temps. Le courant  $di$  doit donc engendrer un champ magnétique dirigé suivant  $\vec{u}_z$ . Il est alors orienté dans le sens positif de la figure de l'énoncé.

Le tuyau est parcouru par un courant et placé dans un champ magnétique. Il subit donc des forces de Laplace. D'après la troisième loi de Newton, la force exercée par le tuyau sur l'aimant est l'opposé de la force exercée par l'aimant sur le tuyau qui est la force de Laplace. D'après la loi de Lenz, la force exercée par le tuyau sur l'aimant doit s'opposer à sa cause qui est le mouvement de l'aimant. **C'est donc une force de freinage.**

b) On a  $\vec{m} = m(\cos\theta \vec{u}_r - \sin\theta \vec{u}_\theta)$ ,  $r = \|\vec{AM}\| = \sqrt{a^2 + (z - z_a)^2}$  et  $\sin\theta = \frac{a}{r}$ .

$$\text{Donc } \vec{A}(M) = \frac{\mu_0 m \sin\theta}{4\pi r^2} \vec{u}_\theta.$$

$$\text{Ceci donne : } \vec{A}(M) = \frac{\mu_0 m a}{4\pi \sqrt{(a^2 + (z - z_a)^2)^3}} \vec{u}_\theta.$$

c) La position du point A dépend du temps et donc  $z_a$ . Le potentiel vecteur  $\vec{A}$  dépend donc du temps.

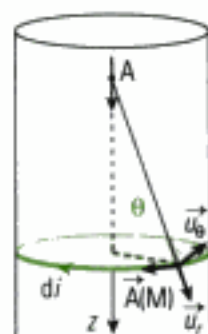
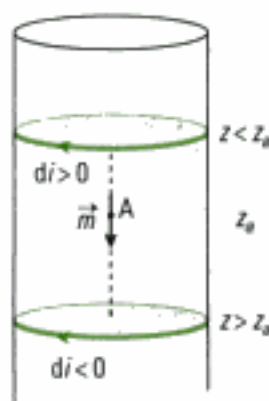
$$\text{Par définition, } \vec{E}_m(M) = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\frac{\mu_0 m a}{4\pi} \frac{3}{2} \frac{2(z - z_a) \frac{dz_a}{dt}}{\sqrt{(a^2 + (z - z_a)^2)^3}} \vec{u}_\theta.$$

$$\text{On retrouve donc : } \vec{E}_m(M) = \frac{-3\mu_0}{4\pi} \frac{ma(z - z_a)v}{\sqrt{(a^2 + (z - z_a)^2)^3}} \vec{u}_\theta.$$

d) • La densité de courant induit est donnée par la loi d'Ohm :  $\vec{j} = \sigma \vec{E}_m$ .

De plus,  $di = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$  où S est la surface d'une section verticale du tuyau. Cette surface est un rectangle de largeur  $e$  et de hauteur  $dz$ .

$$\text{On obtient : } di = \frac{-3\mu_0 \sigma}{4\pi} \frac{ma(z - z_a)v}{\sqrt{(a^2 + (z - z_a)^2)^3}} e dz.$$





• La force électromotrice induite dans le circuit (C) est  $e' = \oint_{(C)} \vec{E}_m \cdot d\vec{l}$  où  $d\vec{l} = a d\varphi \vec{u}_\varphi$  et  $\varphi$  est l'angle des coordonnées sphériques.

On obtient  $e' = \frac{-3\mu_0}{4\pi} \frac{ma(z-z_a)v}{\sqrt{(a^2 + (z-z_a)^2)^3}} 2\pi a$ .

Le circuit (C) est en court-circuit donc  $dR di - e' = 0$ .

Ceci donne :  $di = \frac{-3\mu_0}{4\pi} \frac{ma(z-z_a)v}{\sqrt{(a^2 + (z-z_a)^2)^3}} \frac{2\pi a}{dR}$  dans le sens indiqué sur la figure.

Avec  $dR = \frac{2\pi a}{\sigma e dz}$ , on retrouve :

$$di = \frac{-3\mu_0 \sigma}{4\pi} \frac{ma(z-z_a)v}{\sqrt{(a^2 + (z-z_a)^2)^3}} e dz.$$

**di est bien orienté dans le sens trouvé à la question 1) a), c'est-à-dire  $di > 0$  si  $z < z_a$  et  $di < 0$  si  $z > z_a$ .**

Le terme de résistance  $dR = \frac{2\pi a}{\sigma e dz}$  provient directement de l'expression générale de la résistance

trouvée au chapitre 3 §B :  $dR = \int_{(C)} \frac{dl}{\sigma S}$ . Ici, la section du conducteur est  $S = e dz$ , il vient alors :

$$dR = \int_{(C)} \frac{dl}{\sigma e dz} = \frac{2\pi a}{\sigma e dz}.$$

Si  $dz \rightarrow 0$ ,  $dR \rightarrow +\infty$ . Ceci est logique car, si l'épaisseur du circuit (C) est nulle, celui-ci peut être considéré en court-circuit et on a bien alors :  $dR = +\infty$ .

2) a) La force exercée par l'aimant sur un élément  $d\vec{l}$  est la force de Laplace :

$$d^2\vec{F} = di d\vec{l} \wedge \vec{B} = di dl \vec{u}_\varphi \wedge (B_r \vec{u}_r + B_\theta \vec{u}_\theta).$$

On obtient :  $d^2\vec{F} = -di dl \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m \sin \theta}{r^3} \vec{u}_r + di dl \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{m \cos \theta}{r^3} \vec{u}_\theta$ .

La projection sur Oz donne :

$$d^2F_z = d^2\vec{F} \cdot \vec{u}_z = -di dl \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m \cos \theta \sin \theta}{r^3} - di dl \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{m \cos \theta \sin \theta}{r^3}$$

$$d^2F_z = -di dl \frac{3\mu_0}{4\pi} \frac{m \cos \theta \sin \theta}{r^3}.$$

Donc, sur le circuit (C),  $d\vec{F}_z = \int_0^{2\pi a} d^2F_z = -di \frac{3\mu_0}{2} a \frac{m \cos \theta \sin \theta}{r^3}$ .

b) On intègre sur la hauteur du tuyau :

$$F_z = \int_0^L dF_z = \int_0^L \frac{9\mu_0^2 \sigma}{8\pi} \frac{ma^2(z-z_a)v}{\sqrt{(a^2 + (z-z_a)^2)^3}} \frac{m \cos \theta \sin \theta}{\sqrt{(a^2 + (z-z_a)^2)^3}} e dz.$$

Avec  $\cos \theta = \frac{(z-z_a)}{r}$  et  $\sin \theta = \frac{a}{r}$ , on a :

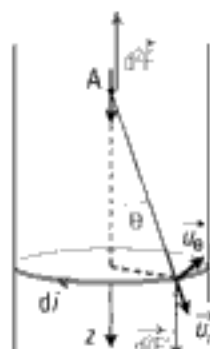
$$F_z = -F_z' = -\frac{9\mu_0^2 \sigma e m^2 a^3 v}{8\pi} \int_0^L \frac{(z-z_a)^2}{(a^2 + (z-z_a)^2)^3} dz.$$

c) Si on pose  $x = \frac{(z-z_a)}{a}$ , on obtient :

$$\int_0^L \frac{(z-z_a)^2}{(a^2 + (z-z_a)^2)^3} dz = \frac{1}{a^7} \int_{-\frac{z_a}{a}}^{\frac{L-z_a}{a}} \frac{x^2}{(1+x^2)^3} dx.$$

Or  $a \ll L$  et on peut supposer que  $a \ll z_a$ . On peut donc considérer que l'on a :

$$\int_{-\frac{z_a}{a}}^{\frac{L-z_a}{a}} \frac{x^2}{(1+x^2)^3} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^3} dx = \frac{5\pi}{128}.$$



d) On trouve alors :  $F_z = \frac{-45\mu_0^2 \sigma e m^2 v}{1024 a^4} = -\alpha v$ , avec  $\alpha = \frac{45\mu_0^2 \sigma e m^2}{1024 a^4}$ .

La composante suivant Oz de la force exercée par le tuyau sur l'aimant est proportionnelle à la vitesse de l'aimant et s'oppose à la chute de l'aimant comme une force de frottement fluide.

e) *Application numérique* :  $\alpha = 3,7 \cdot 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$ .

On trouve l'unité de  $\alpha$  en se souvenant qu'une force s'exprime en  $\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$  ( $F = ma$ ) ou en regardant plus loin l'énoncé.

3) a) L'aimant est soumis à la force exercée par le tuyau et à son poids.

L'application de la deuxième loi de Newton projetée sur l'axe Oz donne :

$$M \frac{dv}{dt} = Mg - \alpha v.$$

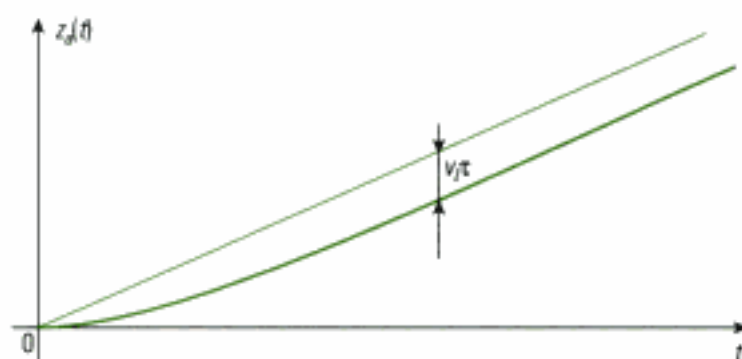
$v$  est donc solution de l'équation différentielle du type  $\tau \frac{dv}{dt} + v = \frac{Mg}{\alpha}$  où  $\tau = \frac{M}{\alpha}$ .

La solution est du type  $v(t) = v_l (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$  où  $v_l = \frac{Mg}{\alpha}$  et  $v_l = \tau g$ .

On en déduit :  $z_a(t) = v_l t + v_l \tau e^{-\frac{t}{\tau}} + K$ , où  $K$  est une constante.

Avec  $z_a(0) = 0$ , on obtient :  $K = -v_l \tau$ , d'où :

$$z_a(t) = v_l t + v_l \tau (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}).$$



b) *Application numérique* :  $v_l = 7,7 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$ ,  $\tau = 7,8 \text{ ms}$  et  $z_a(\tau) = 0,22 \text{ mm}$ .

L'aimant arrive rapidement à sa vitesse limite.

c) Si l'aimant se déplace à sa vitesse limite, le temps de chute est  $t_c = \frac{L}{v_l} = 13,0 \text{ s}$ .

On remarque que la différence avec le temps de chute dans un tuyau de verre (sans induction) est très importante. En comparant avec l'expérience menée avec le tuyau de cuivre, le modèle semble satisfaisant.

d) Les frottements visqueux de l'air semblent négligeables devant les forces de freinage dues à l'induction.

Hidden page



# Index

## A

Alembert (équation de  $d'$ ), 200

Ampère

- théorème d'Ampère, 58
- théorème d'Ampère généralisé, 42

ARQS, 64

Auto-induction, 128

## B

Biot et Savart (loi de), 49

## C

Changement de référentiel (formules de), 164

Charges

- densité volumique, 34
- densité surfacique, 35
- équation de conservation de la charge, 37

Circulation conservative (champ à), 13

Condensateur, 52

Conducteur, 50

Coordonnées (système de), 8

Coulomb

- loi de, 49
- théorème de, 51

Courant

- densité de courant volumique, 36
- densité de courant surfacique, 36
- densité de courant volumique de déplacement, 39

## D

Dipôle magnétique, 59

Dispersion (relation de), 210

Divergence (opérateur), 13

## E

Électromoteur (champ électromoteur d'induction), 124, 165

Énergie électromagnétique (densité volumique de), 67

## F

Faraday (loi de), 41, 126

Flux, 10

Flux conservatif (champ à), 15

Force électromotrice d'induction, 126, 165

Foucault (courants de), 165

## G

Gauss (théorème de), 41

Guide d'onde, 219

Gradient (opérateur), 11

## H

Haut-parleur, 166

## I

Inductance mutuelle, 131

Inductance propre, 128

Influence (de deux conducteurs), 52

## L

Laplace

- équation de, 48
- force de, 56

Laplacien (opérateur), 18

Lenz (loi de), 126

Lorentz (puissance volumique des forces de), 66

## M

Maxwell (équations de), 38

## N

Nabla (opérateur), 19

Neumann

- champ électromoteur de, 124
- théorème de, 131

## O

**Ohm (loi d'Ohm locale), 50**

**Onde**

- longueur d'onde, 206
- nombre d'onde, 206
- OPPH, 205
- plane progressive, 202
- stationnaire, 204
- vecteur d'onde, 206

**Ostrogradsky (formule de), 14**

## P

**Plasma (propagation d'une OPPH dans), 213**

**Poisson (équations de), 48**

**Polarisation (de l'OPPH), 207**

**Potentiel scalaire, 20, 43**

**Potentiel vecteur, 21, 42**

**Poynting**

- vecteur, 67
- équation locale de, 68

## R

**Rayonnement d'un dipôle oscillant, 219**

**Réflexion d'une OPPH, 223**

**Relations de passage du champ électromagnétique, 43**

**Rotationnel (opérateur), 15**

## S

**Stokes (formule de), 17**

## T

**Transformateur**

- idéal de courant, 135
- idéal de tension, 134
- parfait, 133

## V

**Vitesse**

- de l'énergie, 212
- de groupe, 211
- de phase, 210

Hidden page



Hidden page

Hidden page

Hidden page



**Titres disponibles en deuxième année  
dans la filière MP...**

**En Mathématiques**

Analyse MP  
Algèbre et géométrie MP

**En Physique**

Optique MP-PC-PSI-PT  
Mécanique MP-PC  
Électromagnétisme MP  
Électronique MP  
Thermodynamique MP

**En Chimie**

Chimie MP-PT

**Livres d'exercices**

Mathématiques MP  
Physique MP

# LES NOUVEAUX Précis BRÉAL

Une collection tenant compte de vos besoins et de vos contraintes, conçue pour vous aider tout au long de l'année à préparer efficacement les concours.

- **Un cours complet et très clair**, illustré de nombreux exemples, pour comprendre et assimiler.
- **Des pages de méthode**, facilement mémorisables, pour acquérir les savoir-faire et les réflexes nécessaires.
- **De nombreux exercices corrigés**, variés et progressifs, pour s'entraîner régulièrement.

**Les Nouveaux Précis Bréal** sont la **collection de référence** pour réussir sa prépa et intégrer une grande école d'ingénieurs.

BRÉAL, L'ÉDITEUR DES PRÉPAS

Réf. : 209.0359

ISBN : 2 7495 0397 3

[www.editions-breale.fr](http://www.editions-breale.fr)



Copyrighted material